DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

§ 1. Jednačine prvog reda

Jednačine u kojima se promenljive mogu razdvojiti

U zadacima 3901—3910 naći opšte rešenje datih diferencijalnih jednačina.

3901. $(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0.$

3902. $xyy'=1-x^2.$

3903. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}.$

3904. $y'\,\mathrm{tg}\,x-y=a.$

3905. $xy'+y=y^2.$

3906. $y'+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0.$

3907. $\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0.$

3908. $e^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1.$

3909. $y'=10^{x+y}.$

3910. $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}.$

3911. Zavisnost između brzine v projektila i puta l pređenog u cevi oruđa izvodi se u balistici i izražava sledećim obrascem: $v=\dfrac{al^n}{b+l^n}$, u kojem je $v=\dfrac{dl}{dt}$ i $n<1$. Naći zavisnost između vremena t kretanja projektila i puta l pređenog u cevi.

3912. Ako je x količina jodovodonične kiseline HJ, koja se razloži do trenutka t, onda se brzina razlaganja $\dfrac{dx}{dt}$ definiše diferencijalnom jednačinom $\dfrac{dx}{dt}=k_1\left(\dfrac{1-x}{v}\right)^2-k_2\left(\dfrac{x}{v}\right)^2$, u kojoj su k_1, k_2 i v konstante; rešiti ovu jednačinu.

U zadacima 3913—3916 naći partikularna rešenja diferencijalnih jednačina koja zadovoljavaju date početne uslove.

3913. $y' \sin x = y \ln y; \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e.$

3914. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}; \quad y|_{x=0} = 1.$

3915. $\sin y \cos x \, dy = \cos y \sin x \, dx; \quad y|_{x=0} = \dfrac{\pi}{4}.$

3916. $y - xy' = b\,(1 + x^2 y'); \quad y|_{x=1} = 1.$

3917. Naći krivu koja prolazi kroz tačku (2, 3) i čija svaka tačka polovi odsečak odgovarajuće tangente koji leži između koordinatnih osa.

3918. Naći krivu koja prolazi kroz tačku (2, 0) i u čijoj svakoj tački odsečak tangente od te tačke do preseka sa ordinatnom osom ima konstantnu dužinu jednaku dve jedinice.

3919. Naći sve krive kod kojih se odsečak tangente od tačke dodira do apscisne ose polovi tačkom preseka sa ordinatnom osom.

3920. Naći sve krive kod kojih je subtangenta proporcionalna apscisi tačke dodira (koeficijent proporcionalnosti je k).

3921. Naći krivu koja prolazi kroz tačku $(a, 1)$ i ima konstantnu subtangentu $(=a)$.

3922. Naći sve krive kod kojih odsečak normale od tačke na krivoj do apscisne ose ima konstantnu dužinu a.

3923. Naći sve krive kod kojih je zbir dužina tangente i subtangente u svakoj tački krive proporcionalan proizvodu koordinata tačke dodira (keoficijent proporcionalnosti je k).

3924. Naći krivu $y = f(x)$ $(f(x) > 0,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1)$ koja zajedno sa x-osom i ordinatom tačke $M(x, y)$ obrazuje krivolinijski trougao čija je površina proporcionalna $(n+1)$-om stepenu ordinate tačke M.

3925. Materijalna tačka, čija je masa $1\,g$, kreće se pravolinijski pod dejstvom sile proporcionalne vremenu računatom od trenutka $t=0$, i obrnuto proporcionalne brzini kretanja tačke; u trenutku $t = 10\,sec$ brzina je iznosila $0{,}5\ m/sec$, a sila $4 \cdot 10^{-5}\,N$. Kolika će biti brzina po isteku jedne minute od početka kretanja?

3926. Materijalna tačka kreće se pravolinijski i to tako da je njena kinetička energija u trenutku t proporcionalna srednjoj brzini kretanja u vremenskom intervalu od 0 do t; zna se da je za $t=0$ put $s=0$. Pokazati da je kretanje ravnomerno.

3927. Motorni čamac kreće se u mirnoj vodi brzinom $v = 10\ km/čas$; u trenutku kad se čamac kretao punom brzinom njegov je motor isključen, i nakon $t = 20$ sec njegova se brzina smanjila na $6\ km/čas$. Uzimajući da je otpor koji voda pruža kretanju čamca proporcionalan njegovoj brzini, naći brzinu čamca po isteku 2 minuta od isključenja motora, a takođe i rastojanje koje čamac pređe za vreme od jednog minuta od isključenja motora.

3928. U dnu cilindričnog suda sa površinom poprečnog preseka od $S\ cm^2$ i sa vertikalnom osom, nalazi se mali kružni otvor čija je površina $q\ cm^2$, zatvoren dijafragmom (kao kod objektiva fotoaparata); u sud je nasuta tečnost do visine h. U trenutku $t=0$ dijafragma se počinje otvarati tako da je površina otvora proporcionalna vremenu i da ceo otvor bude slobodan nakon $T\ sec$; kolika će biti visina H tečnosti u sudu nakon $T\ sec$ od početka opita? (Vidi zadatke 2701—2706).

3929. Brzina hlađenja tela proporcionalna je razlici temperature tela i okolne sredine. U zadacima 2710—2711 pretpostavljali smo da je koeficijent proporcionalnosti konstantan; pri nekim proračunima uzima se da on zavisi linearno od vremena: $k=k_0(1+\alpha t)$. Naći pod ovim uslovom zavisnost između temperature tela θ i vremena t, uzimajući da je za $t=0$ temperatura tela $\theta=\theta_0$, a temperatura okolne sredine θ_1.

3930*. Brzina kojom se u toku rašćenja povećava površina mladog lista biljke victoria regia, koji, kao što je poznato, ima oblik kruga, proporcionalna je obimu lista i količini sunčeve svetlosti koja pada na list; ova poslednja je, sa svoje strane, proporcionalna površini lista i kosinusu upadnog ugla svetlosnih zrakova. Naći zavisnost između površine S lista i vremena t ako se zna da je u 6 časova ujutru ta površina iznosila 1600 cm^2, a u 6 časova uveče istog dana 2500 cm^2. (Pretpostaviti da je posmatranje vršeno na ekvatoru na dan ravnodnevnice, kad se nagib sunčevih zrakova prema vertikali može smatrati jednakim 90° u 6 časova ujutru i 6 časova uveče, a 0° u podne).

U zadacima 3931—3933 zamenom tražene funkcije svesti date jednačine na jednačine koje dopuštaju razdvajanje promenljivih, i rešiti te jednačine.

3931. $y'=\cos(x-y)$ (staviti $u=x-y$).

3932. $y'=3x-2y+5$.

3933. $y'\sqrt{1+x+y}=x+y-1$.

Homogene jednačine

U zadacima 3934—3944 naći opšta rešenja datih jednačina.

3934. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2$.

3935. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

3936. $x\,dy-y\,dx=y\,dy$.

3937. $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

3938. $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

3939. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$.

3940. $y^2+x^2y'=xyy'$.

3941. $y'=e^{\frac{x}{y}}+\dfrac{y}{x}$.

3942. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

3943. $(3y^2+3xy+x^2)\,dx=(x^2+2xy)\,dy$.

3944. $y' = \frac{y}{x} + \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}$.

U zadacima 3945—3948 naći partikularna rešenja datih jednačina koja zadovoljavaju date početne uslove.

3945. $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x; \quad y|_{x=1} = 0.$

3946. $(y^2 - 3x^2)\,dy + xy\,dx = 0; \quad y|_{x=0} = 1.$

3947. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}; \quad y|_{x=1} = -1.$

3948. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad y|_{x=0} = \sqrt{5}.$

3949. Rešenje jednačine $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ svesti na kvadrature. Kakva mora biti funkcija $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ da bi funkcija $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$ predstavljala opšte rešenje date jednačine.

3950. Naći krive kod kojih je odsečak, koji od ordinatne ose odseca bilo koja tangenta krive, jednak proizvodu koordinata tačke dodira.

3951. Naći krive kod kojih je odsečak koji od ordinatne ose odseca bilo koja tangenta, jednak odgovarajućoj subnormali.

3952. Naći krive kod kojih je poteg bilo koje tačke M jednak rastojanju između koordinatnog početka i preseka tangente u tački M sa y-osom.

3953*. Kakav oblik ima ogledalo reflektora ako svetlosni zraci, koji polaze iz tačkastog izvora, posle odbijanja obrazuju paralelan snop?

Linearne jednačine

U zadacima 3954—3964 naći opšta rešenja datih jednačina.

3954. $y + 2y = 4x.$

3955. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

3956. $y + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$

3957. $(1+x^2)\,y' - 2xy = (1+x^2)^2.$

3958. $y' + y = \cos x.$

3959. $y' + ay = e^{mx}$

3960. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0.$

3961. $y = \frac{1}{2x - y^2}.$

3962. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}.$

3963. $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$.

3964. $y'+y\Phi'(x)-\Phi(x)\Phi'(x)=0$, pri čemu je $\Phi(x)$ data funkcija.

U zadacima 3965—3968 naći partikularna rešenja koja zadovoljavaju navedene početne uslove.

3965. $y'-y\operatorname{tg} x=\sec x;\quad y|_{x=0}=0$.

3966. $xy'+y-e^x=0;\quad y|_{x=a}=b$.

3967. $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x;\quad y|_{x=1}=0$.

3968. $t(1+t^2)\,dx=(x+xt^2-t^2)\,dt;\quad x|_{t=1}=-\dfrac{\pi}{4}$.

3969. Neka su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva različita partikularna rešenja jednačine

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x).$$

a) Dokazati da funkcija $y=y_1+C(y_2-y_1)$ predstavlja opšte rešenje date jednačine (C je konstanta).

b) Kakva veza mora postojati između konstanata α i β da bi linearna kombinacija $\alpha y_1+\beta y_2$ predstavlja rešenje date jednačine?

c) Dokazati da, ako je y_3 treće partikularno rešenje gornje jednačine, različito od y_1 i y_2, onda je vrednost količnika $\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ konstantna.

3970. Dokazati identitet (vidi zadatak 2375): $\int\limits_0^x e^{zx-z^2}dz=e^{\frac{x^2}{4}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}dz$.

(Uputstvo: izvesti diferencijalnu jednačinu za funkciju $I(x)=\int\limits_0^x e^{zx-z^2}dz$ i rešiti tu jednačinu).

3971. Naći krive kod kojih je dužina odsečka, koji tangenta u bilo kojoj tački otseca od y-ose, za dve jedinice manja od apscise tačke dodira.

3972*. Naći krive kod kojih površina pravougaonika, čije su stranice: apscisa proizvoljne tačke M krive i odsečak koji tangenta krive u tački M otseca od y-ose, ima konstantnu vrednost $(=a^2)$.

3973*. Naći krive kod kojih površina trougla koji obrazuje tangenta u bilo kojoj tački M krive sa potegom te tačke i apscisnom osom, ima konstantnu vrednost $(=a^2)$.

3974. Materijalna tačka mase m kreće se pravolinijski, pod dejstvom sile proporcionalne vremenu (koeficijent proporcionalnosti je k_1) merenom od trenutka kad je brzina tačke imala vrednost nulu; osim toga na tačku dejstvuje i sila koja potiče od otpora sredine, proporcionalna brzini (koeficijent proporcionalnosti je k). Naći funkcionalnu zavisnost brzine od vremena.

3975. Materijalna tačka mase m kreće se pravolinijski pod dejstvom sile proporcionalne trećem stepenu vremena merenom od trenutka kad je brzina tačke bila v_0 (koeficijent proporcionalnosti je k); osim toga na tačku dejstvuje i otpor sredine, proporcionalan proizvodu brzine i vremena (koeficijent proporcionalnosti je k_1). Naći funkcionalnu zavisnost brzine od vremena.

3976. Početna temperatura tela $\theta_0\,°C$ jednaka je temperaturi okolne sredine. Telo prima toplotu od aparata za zagrevanje (brzina dobijanja toplote je zadata funkcija vremena: $c\cdot\varphi(t)$, pri čemu je c konstantan toplotni kapacitet tela); osim toga telo odaje toplotu okolnoj sredini (brzina hlađenja proporcionalna je razlici između temperature tela i temperature okoline). Naći zavisnost temperature tela od vremena (merenog od početka opita).

Rešiti zadatke 3977—3978 uzimajući u obzir da, ako struja promenljive jednačine $I=I(t)$ teče kroz provodnik sa koeficijentom samoindukcije L i otporom R, onda pad napona duž provodnika iznosi $L\cdot\frac{dI}{dt}+R\cdot I$.

3977. Razlika potencijala na krajevima kalema ravnomerno opada od vrednosti $E_0=2\ V$ do vrednosti $E_1=1\ V$ u toku 10 *sec*. Kolika je jačina struje na kraju desete sekunde, ako je ona u početku opita bila $16\frac{2}{3}\ A$, i ako otpor kalema iznosi $0{,}12\ \Omega$, a koeficijent samoindukcije je $0{,}1\ H$.

3978. Naći jačinu struje u kalemu u trenutku t ako je otpor kalema R, koeficijent samoindukcije L, početna jačina struje $I_0=0$, a elektromotorna sila se menja po oblascu: $E=E_0\sin\omega t$.

Razni zadaci

(Jednačine sa razdvojivim promenljivim, homogene i linearne)

U zadacima 3979—3997 naći opšta rešenja datih jednačina.

3979. $y'=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$.

3980. $x^2dy+(3-2xy)\,dx=0$.

3981. $x(x^2+1)\,y'+y=x(1+x^2)^2$.

3982. $y'=\frac{y+1}{x}$.

3983. $y'=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

3984. $(8y+10x)\,dx+(5y+7x)\,dy=0$.

3985. $x^3y'=y(y^2+x^2)$.

3986. $\frac{xy'-y}{x}=\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

3987. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$.

3988. $y'=e^{2x}-e^xy$.

3989. $\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$.

3990. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$.

3991. $(x-2xy-y^2)\,dy+y^2\,dx=0.$

3992. $y'+y\cos x=\sin x\cos x.$

3993. $(x+1)\,y'-ny=e^x(x+1)^{n+1}.$

3994. $y\,dx=(y^3-x)\,dy.$ **3995.** $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x+y)\frac{dy}{dx}+xy=0.$

3996*. $yy'\sin x=\cos x(\sin x-y^2).$ **3997.** $y'=(x+y)^2.$

3998. Uveriti se da su integralne krive diferencijalne jednačine $(1-x^2)\,y'+$ $+xy=ax$ — elipse i hiperbole čiji su centri u tački $(0, a)$ a ose paralelne koordinatnim osama, pri čemu svaka kriva ima jednu osu konstantne dužine $=2$ jedinice.

U zadacima 3999—4002 naći partikularna rešenja diferencijalnih jednačina, koja zadovoljavaju date početne uslove.

3999. $\frac{y-xy'}{x+yy'}=2;\qquad y|_{x=1}=1.$

4000. $y'-\frac{y}{1-x^2}=1+x;\qquad y|_{x=0}=1.$

4001. $(1+e^x)\,yy'=e^y;\qquad y|_{x=0}=0.$

4002. $y'=3x^2y+x^5+x^2;\qquad y|_{x=0}=1.$

4003. Uveriti se da samo prave $y=kx$ i hiperbole $xy=m$ imaju sledeću osobinu: dužina potega bilo koje njihove tačke jednaka je dužini tangente povučene u toj tački.

4004. Naći krive kod kojih je dužina normale u svakoj tački krive proporcionalna kvadratu ordinate te tačke (koeficijent proporcionalnosti je k).

4005. Naći krive kod kojih svaka tangenta preseca y-osu u tački podjednako udaljenoj od dodirne tačke i od koordinatnog početka.

4006. Naći jednačinu krive koja preseca apscisnu osu u tački $x=1$ i kod koje je dužina subnormale u svakoj tački krive jednaka aritmetičkoj sredini koordinata te tačke.

4007. Naći krivu kod koje je površina trapeza koji obrazuju koordinatne ose, tangenta u proizvoljnoj tački M krive i ordinata te tačke, jednaka polovini kvadrata apscise tačke M.

4008. Naći krivu kod koje je površina ograničena apscisnom osom, traženom krivom i dvema ordinatama, od kojih je jedna konstantna a druga promenljiva, jednaka odnosu trećeg stepena promenljive ordinate prema promenljivoj apscisi.

4009. Naći krivu kod koje je površina ograničena apscisnom osom, dvema ordinatama i lukom MM' tražene krive, proporcionalna luku MM' za ma koje dve tačke M i M' krive.

4010. Naći krivu za koju bi apscisa težišta krivolinijskog trapeza koji obrazuju koordinatne ose, prava $x=a$ i tražena kriva, bila $\frac{3a}{4}$ ma kolika bila vrednost a.

4011*. Naći krivu čije sve tangente prolaze kroz datu tačku (x_0, y_0).

4012. Naći krivu koja prolazi kroz koordinatni početak i čije sve normale prolaze kroz datu tačku (x_0, y_0).

4013. Naći krivu kod koje je ugao koji tangenta u bilo kojoj tački krive zaklapa sa x-osom dva puta veći od ugla koji poteg iste tačke zaklapa sa istom osom.

4014. Telo jedinične mase kreće se pod dejstvom dve sile: aktivne sile proporcionalne vremenu (koeficijent proporcionalnosti je k_1) i otpora okolne sredine proporcionalnog brzini kretanja tela (koeficijent proporcionalnosti je k_2). Naći zakon kretanja tela (tj. zavisnost pređenog puta od vremena).*)

4015. Čestica pada u sredini čiji je otpor proporcionalan kvadratu brzine kretanja čestice; pokazati da će brzina kretanja biti $\frac{dv}{dt}=g-kv^2$, pri čemu je k konstanta a g — ubrzanje zemljine teže. Integrisati ovu jednačinu i pokazati da $v \to \sqrt{\frac{g}{k}}$ kad $t \to \infty$.

4016. Sila trenja koja usporava kretanje diska koji se obrće u tečnosti, proporcionalna je ugaonoj brzini obrtanja.

1) Brzina obrtanja diska, koja je u početku iznosila 3 obrta u sekundi, posle 1 minuta spala je na 2 obrta u sekundi; kolika će biti ta brzina nakon 3 minuta od početka obrtanja?

2) Disk, čija je početna brzina bila 5 obrta u sekundi, posle 2 minuta obrće se ugaonom brzinom od 3 obrta u sekundi; posle kog će vremena od početka obrtanja njegova ugaona brzina iznositi 1 obrt u sekundi?

4017. Puščano zrno ulazi u dasku debljine $h=0{,}1$ cm brzinom $v_0=200$ m/sec, a izlazi iz daske, probivši je, brzinom $v_1=80$ m/sec. Uzimajući da je sila otpora daske, koja usporava kretanje zrna, proporcionalna kvadratu njegove brzine, izračunati koliko je vremena trajalo kretanje zrna kroz dasku.

4018* Vodena kap, čija je početna masa M_0 grama i koja ravnomerno isparava brzinom m grama u sekundi, kreće se po inerciji početnom brzinom v_0 *cm/sec*; sila otpora sredine proporcionalna je brzini kretanja kâpi i njenom poluprečniku, a vrednost joj je u počenom momentu (tj. za $t=0$) bila f_0 dina. Naći zavisnost brzine kâpi od vremena.

4019*. Kišna kap, čija je početna masa M_0 grama i koja ravnomerno isparava brzinom m grama u sekundi, slobodno pada u vazduhu; sila otpora vazduha proporcionalna je brzini kretanja kapi (koeficijent proporcionalnosti je k). Nrći zavisnost brzine kretanja kapi od vremena, računatog od početka padanja, ako je u početnom trenutku brzina kapi bila jednaka nuli. (Pretpostaviti da je $k \neq 2m$).

4020*. Rešiti prethodni zadatak za kap sfernog oblika, uzimajući da je sila otpora vazduha proporcionalna proizvodu brzine i površine kapi i da je gustina tečnosti γ. (Rešenje svesti na kvadrature).

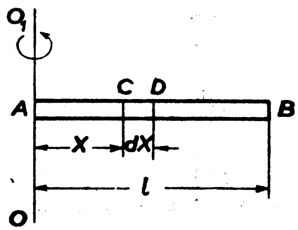
4021*. Ako se u bilo kakvom procesu jedna supstanca pretvara u drugu, pri čemu je brzina obrazovanja novog proizvoda proporcionalna količini supstance koja se transformiše, onda se takva pojava naziva procesom (ili reakcijom) prvog reda.

Neka supstanca, čija je početna količina bila m_0, pretvara se u drugu supstancu, a iz tako dobijenog produkta neposredno nastaje novi produkt; obe transformacije se odvijaju kao procesi prvog reda, pri čemu su koeficijenti proporcionalnosti poznati: k_1 u prvom i k_2 u drugom procesu.

Kolika će biti tako nastala količina drugog produkta nakon t jedinica vremena od početka procesa.

4022. U rezervoaru zapremine 100 l nalazi se slan rastvor koji sadrži 10 kg rastvorene soli. U rezervoar pritiče čista voda brzinom od 3 l/min, i iz njega se istom brzinom preliva rastvor u drugi rezervoar zapremine takođe 100 l. koji je u početku bio napunjen čistom vodom i iz koga se višak tečnosti izliva napolje. Koliko će se soli nalaziti u drugom rezervoaru po isteku 1 časa? Kolika je maksimalna količina soli u drugom rezervoaru? U kom trenutku će ta maksimalna količina biti dostignuta? (Stalnim mešanjem rastvora obezbeđuje se ravnomernost koncentracije soli u oba rezervoara).

4023. Napon i otpor kola menjaju se ravnomerno u toku jednog minuta respektivno od nule do 120 V i od nule do 120 Ω (vidi zad. 3977 — — 3978); samoindukcija kola je konstantna ($= 1\ H$), a početna jačina struje je I_0. Naći zavisnost jačine struje od vremena u toku prvog minuta od početka opita.



Sl. 69

4024*. U uskoj horizontalnoj cilindričnoj cevi AB, hermetički zatvorenoj, nalazi se gas; cev se ravnomerno obrće oko vertikalne ose OO_1 koja prolazi kroz jedan njen kraj (sl. 69) ugaonom brzinom ω. Dužina cevi je l cm, površina poprečnog preseka je S cm², masa zatvorenog gasa je M grama, a pritisak u cevi dok je u stanju mirovanja (konstantan duž čitave cevi) je p_0; naći raspodelu pritiska duž cevi za vreme njenog obrtanja, tj. izraziti p kao funkciju od x.

Drugi primeri jednačina prvog reda

U zadacima 4025 — 4037 zamena promenljivih svodi date jednačine na jednačine linearne ili homogene.

4025. $y' = \dfrac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$. **4026.** $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

4027. $(x + y + 1)\,dx = (2x + 2y - 1)\,dy$.

4028. $y' = \dfrac{2(y+2)^2}{(x + y - 1)^2}$. **4029.** $y' = \dfrac{y^2 - x}{2y(x+1)}$.

4030. $y' = \dfrac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}$. **4031.** $(1 + y^2)\, dx = x\, dy$.

4032. $(x^2y^2 - 1)\, y' + 2xy^3 = 0$.

4033. $yy' + x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)^2$. **4034.** $xy' + 1 = e^y$.

4035. $(x^2 + y^2 + 1)\, dy + xy\, dx = 0$.

4036. $x\, dx + y\, dy + x(x\, dy - y\, dx) = 0$.

4037. $(x^2 + y^2 + y)\, dx = x\, dy$.

U zadacima 4038 — 4047 rešiti date Bernulijeve jednačine.

4038. $y' = 2xy = 2x^3y^3$.

4039. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

4040. $y^{n-1}(ay' + y) = x$.

4041. $x\, dx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right) dy$.

4042. $xy' + y = y^2 \ln x$.

4043. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$.

4044. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

4045. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

4046. $y\, dy - \dfrac{ay^2}{x^2}\, dx = \dfrac{b\, dx}{x^2}$.

4047. $y' = \dfrac{y\varphi'(x) - y^2}{\varphi(x)}$, pri čemu je $\varphi(x)$ zadana funkcija.

4048. Naći krivu kod koje je odsečak koji tangenta u proizvoljnoj tački krive odseca od ordinatne ose:

1) proporcionalan kvadratu ordinate dodirne tačke;

2) proporcionalan trećem stepenu ordinate dodirne tačke.

4049. Naći krive $\rho = f(\varphi)$ kod kojih je površina sektora („krivolinijskog trougla"), ograničenog lukom krive između nepomične tačke $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ i proizvoljne tačke $M\rho, \varphi)$ i potezima ovih tačaka, — proporcionalna proizvodu polarnih koordinata tačke M (koeficijent proporcionalnosti je k).

Jednačine sa totalnim diferencijalima

U zadacima 4050 — 4057 naći opšta rešenja datih jednačina.

4050. $(2x^3 - xy^2)\, dx + (2y^3 - x^2y)\, dy = 0$.

4051. $\dfrac{x\, dy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dx$.

4052. $e^y\, dx + (xe^y - 2y)\, dy = 0$.

4053. $yx^{y-1}\, dx + x^y \ln x\, dy = 0$.

4054. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

4055. $\dfrac{y+\sin x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx + \dfrac{x}{\cos^2(xy)}\,dy + \sin y\,dy = 0$.

4056. $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})\,dx + (-1 + \sqrt{x^2+y^2})\,y\,dy = 0$.

4057. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx +$

$$+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$$

Integracioni faktor

U zadacima 4058 — 4062 naći integracioni faktor i opšta rešenja datih jednačina.

4058. $(x^2+y)\,dx - x\,dy = 0$.

4059*. $y(1+xy)\,dx - x\,dy = 0$.

4060. $(x^2+y^2+2x)\,dx + 2y\,dy = 0$.

4061. $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0$.

4062. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$.

4063. Uveriti se da se za integracioni faktor linearne jednačine

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

može uzeti funkcija $e^{\int P(x)\,dx}$.

4064. Naći integracioni faktor Bernulijeve jednačine

$$y' + P(x)\cdot y = y^n \cdot Q(x).$$

4065. Naći uslove pod kojima će jednačina $X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0$ imati integracioni faktor oblika $M = F(x+y)$.

4066. Naći uslove pod kojima će jednačina $X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0$ imati integracioni faktor oblika $M = F(x\cdot y)$.

Razni zadaci

U zadacima 4067[1]— 4088 naći opšta rešenja datih jednačina.

4067. $y' = ax + by + c$.

4068. $ay' + by + cy^m = 0$.

4069. $y' = \dfrac{x+y-2}{y-x-4}$.

4070. $y' = \dfrac{y^2+xy-x^2}{y^2}$.

4071. $y' = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$.

4072. $y'(y^2 - x) = y$.

4073. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0$.

4074. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$.

4075. $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

4076. $y' = \dfrac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}$.

4077. $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

4078. $\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\dfrac{x^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{y}\right]dy = 0$.

4079. $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

4080. $y\sin x + y'\cos x = 1$.

4081. $y' - y + y^2\cos x = 0$.

4082. $y' = \dfrac{\cos x \sin y + \operatorname{tg}^2 x}{\sin x \cdot \cos y}$.

4083. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$.

4084. $\left(x\cos\dfrac{y}{x} + y\sin\dfrac{y}{x}\right)y\,dx + \left(x\cos\dfrac{y}{x} - y\sin\dfrac{y}{x}\right)x\,dy = 0$.

4085. $y' = \dfrac{x}{\cos y} - \operatorname{tg} y$.

4086. $y - y'\cos x = y^2\cos x\,(1 - \sin x)$

4087. $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \dfrac{x^2 - y^2}{x} - 2x$.

4088. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{x}{y}\right)dy = 0$.

4089. Naći krivu kod koje se subnormala u svakoj tački odnosi prema zbiru apscise i ordinate kao ordinata te tačke prema njenoj apscisi.

4090. Naći krivu kod koje je odsečak svake njene tangente od x-ose do prave $y = ax + b$ prepolovljen tačkom dodira.

4091. Naći krivu kod koje količnik odstojanja koordinatnog početka od normale u bilo kojoj tački krive i odstojanja tačke (a, b) od te iste normale, ima konstantnu vrednost k.

4092. Naći krivu kod koje je odstojanje koordinatnog početka od tangente u bilo kojoj tački krive jednako odstojanju koordinatnog početka od normale krive u istoj tački.

4093*. Naći krivu kod koje je ordinata bilo koje njene tačke M geometrijska sredina apscise tačke M i zbira apscise i subnormale u tački M.

4094. U električno kolo čiji je otpor $R=\frac{2}{3}\,\Omega$ u toku 2 minuta uvodi se ravnomerno napon (od nule do $120\,V$); osim toga automatski se uvodi samoindukcija tako da je broj henrija u kolu jednak broju koji predstavlja jačinu struje u amperima. Naći zavisnost jačine struje od vremena u toku prve dve minute od početka opita.

§ 2. Jednačine prvog reda (nastavak)

Polje pravca. Izokline

4095. Data je diferencijalna jednačina $y'=-\frac{x}{y}$. a) Konstruisati polje pravaca definisano datom jednačinom; b) ispitati položaj vektora polja u odnosu na vektor položaja ma koje tačke polja; c) proučiti oblik integralnih krivih diferencijalne jednačine polazeći od polja pravaca; d) naći integralne krive rešavajući datu jednačinu običnim postupkom (razdvajanjem promenjivih); e) šta predstavlja familija izoklina date diferencijalne jednačine?

4096. Izvesti diferencijalnu jednačinu čije su izokline:

1) ravnostrane hiperbole $xy=a$;
2) parabole $y^2=2px$;
3) krugovi $x^2+y^2=R^2$.

4097. Naći izokline diferencijalne jednačine familije parabola $y=ax^2$; nacrtati sliku i protumačiti rezultat geometrijski.

4098. Uveriti se da su izokline homogene jednačine (i samo homogene jednačine) — prave linije koje prolaze kroz koordinatni početak.

4099. Naći linearne jednačine čije su izokline prave linije.

4100. Neka su y_1, y_2, y_3 bilo koje tri izokline neke linearne jednačine koje odgovaraju istoj apscisi; uveriti se da količnik $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ zadržava konstantnu vrednost pa ma kolika bila ta apscisa.

Približna integracija diferencijalnih jednačina

4101. Data je jednačina $y'=\frac{x^2+y^2}{10}$. Nacrtati pri[illegible]o integralnu krivu za $1<x<5$, koja prolazi kroz tačku $M(1,\ 1)$.

4102. Data je jednačina $y'=\frac{1}{x^2+y^2}$; nacrtati približno integralnu krivu za $0{,}5<x<3{,}5$ koja prolazi kroz tačku $M(0{,}5;\ 0{,}5)$.

4103. Data je jednačina $y' = xy^3 + x^2$; primenom Ojlerova metoda izračunati (na dve decimale), za $x = 1$, vrednost y onog partikularnog rešenja ove jednačine koje zadovoljava uslov $y|_{x=0} = 0$.

4104. Data je jednačina $y' = \sqrt{x} \cdot y^2 + 1$; primenom Ojlerova metoda izračunati (na dve decimale), za $x = 2$, vrednost onog partikularnog rešenja ove diferencijalne jednačine koje zadovoljava uslov $y|_{x=1} = 0$.

4105. Data je jednačina $y' = \dfrac{xy}{2}$ i početni uslov $y|_{x=0} = 1$; rešiti ovu jednačinu tačno i naći vrednost y za $x = 0{,}9$, a zatim izračunati ovu vrednost približno primenom Ojlerava metoda, deleći interval $[0;\ 0{,}9]$ na devet delova, i odrediti granicu relativne greške dobijenog rezultata.

4106. Data je jednačina $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$ i početni uslov $y|_{x=1} = 0$. Rešiti jednačinu tačno, a zatim, primenom bilo kog metoda pribilžne integracije, izračunati vrednost x za $y = 1$ i uporediti sa vrednošću x dobijenom iz tačnog rezultata.

4107. $y' = y^2 + xy + x^2$; metodom sukcesivnih aproksimacija naći drugu aproksimaciju onog partikularnog rešenja koje zadovoljava početni uslom $y|_{x=0} = 1$.

4108. $y' = xy^3 - 1$; naći za $x = 1$ vrednost onog rešenja date jednačine koje zadovoljava početni uslov $y|_{x=0} = 0$. Zaustaviti se na trećoj aproksimaciji prilikom primene metoda sukcesivnih aproksimacija, a račune izvoditi sa tačnošću od dve decimale.

U zadacima 4109—4116 naći nekoliko prvih članova potencijalnog reda koji predstavlja partikularno rešenje date jednačine za dati početni uslov.

4109. $y' = y^3 - x;\quad y|_{x=0} = 1.$

4110. $y' = x^2y^2 - 1;\quad y|_{x=0} = 1.$

4111. $y' = x^2 - y^2;\quad y|_{x=0} = 0.$

4112. $y' = \dfrac{1 - x^2}{y} + 1;\quad y|_{x=0} = 1.$

4113. $y' = \dfrac{xy}{1 + x + y};\quad y|_{x=0} = 0.$

4114. $y' = e^y + xy;\quad y|_{x=0} = 0.$

4115. $y' = \sin y - \sin x;\quad y|_{x=0} = 0.$

4116. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2;\quad y|_{x=0} = 1.$

Singularna rešenja. Klero-ova i Lagranž-eva jednačina

U zadacima 4117—4130 naći opšta i partikularna rešenja datih diferencijalnih jednačina.

4117. $y = xy' + y'^2.$

4118. $y = xy' - 3y'^3.$

4119. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}.$

4120. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$

4121. $y = xy' + \sin y'.$

4122. $xy' - y = \ln y'.$

4123. $y = y'^2 (x + 1).$

4124. $2yy' = x(y'^2 + 4).$

4125. $y = yy'^2 + 2xy'$.

4126. $y = x(1+y') + y'^2$.

4127. $y' = \ln(xy' - y)$.

4128. $y = y'(x+1) + y'^2$.

4129. $y = y'x + a\sqrt[3]{1 - y'^3}$

4130. $x = y\left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.

U zadacima 4131—4133 naći singularna rešenja datih jednačina koristeći isti metod koji se primenjuje i pri integraciji Lagranževe i Klero-ove jednačine.

4131. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

4132. $x^2y'^2 - 2(xy-2)y' + y^2 = 0$.

4133. $y'(y' - 2x) = 2(y - x^2)$.

4134. Dokazati stav: Ako je linearna diferencijalna jednačina ujedno i Klero-ova onda familija njenih integralnih krivih predstavlja snop pravih.

4135. Naći krivu kod koje je površina trougla koji obrazuju tangenta u proizvoljnoj tački tražene krive i koordinatne ose — konstantna.

4136. Naći krivu čije tangente odsecaju od koordinatnih osa odsečke čiji zbir ima konstantnu vrednost $= 2a$.

4137. Naći krivu kod koje proizvod odstojanja bilo koje njene tangente od dve date tačke ima konstantnu vrednost.

4138. Naći krivu kod koje je površina pravougaonika čije su stranice tangenta i normala u proizvoljnoj tački M tražene krive, jednaka površini pravougaonika čije su stranice po dužini jednake apsolutnim vrednostima koordinata tačke M.

4139. Naći krivu kod koje je zbir normale i subnormale u proizvoljnoj tački tražene krive proporcionalan apscisi te tačke.

4140*. Naći krivu kod koje odsečak normale u proizvoljnoj tački tražene krive, koji leži između koordinatnih osa, ima konstantnu dužinu a.

4141. Brzina materijalne tačke u proizvoljnom trenutku vremena razlikuje se od srednje brzine (računate za period od početka kretanja do tog trenutka) za veličinu koja je proporcionalna kinetičkoj energiji tačke i obrnuto proporcionalna vremenu računatom od početka kretanja; naći zavisnost pređenog puta od vremena.

Ortogonalne i izogonalne trajektorije i evolvente

U zadacima 4142 — 4147 naći ortogonalne trajektorije date familije krivih.

4142. Familije elipsi sa zajedničkom velikom osom $= 2a$.

4143. Familije parabola $y^2 = 4(x-a)$.

4144. Familije krugova $x^2 + y^2 = 2ax$.

4145. Familije cisoida $(2a - x)y^2 = x^3$.

4146. Familije kongruentnih (podudarnih) parabola koje dodiruju datu pravu tako da je tačka dodira svake parabole ujedno i teme te parabole.

4147. Familije krugova istog poluprečnika čiji centar leži na datoj pravoj.

4148. Naći familiju trajektorija koje presecaju krive $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$ (a je parametar) pod uglom od $60°$.

4149. Naći izogonalne trajektorije familije parabola $y^2 = 4x$, ako je ugao preseka $\alpha = 45°$.

4150*. Naći krive rasprostiranja zvuka u ravni od nepomičnog zvučnog izvora koji leži u istoj toj ravni, ako duž bilo koje prave, koja prolazi kroz izvor zvuka, duva vetar u jednom pravcu konstantnom brzinom a.

U zadacima 4151—4154 naći evolvente datih krivih.

4151. Kruga $x^2 + y^2 = R^2$.

4152. Lančanice $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$.

4153. Evolvente kruga $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

4154. Semikubne parabole $y = 3t^2$, $x = -2t^3$.

§ 3. Jednačine drugog i višeg reda

Posebni slučajevi jednačina drugog reda

U zadacima 4155—4182 naći opšta rešenja datih jednačina.

4155. $y'' = x + \sin x$.

4156. $y'' = \operatorname{arctg} x$.

4157. $y'' = \ln x$.

4158. $xy'' = y'$

4159. $y'' = y' + x$.

4160. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$.

4161. $(1 + x^2) y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

4162. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

4163. $(y'')^2 = y'$.

4164. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

4165. $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$.

4166. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

4167. $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

4168. $a^2 y'' - y = 0$.

4169. $y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

4170. $y'' + \dfrac{2}{1-y} (y')^2 = 0$.

4171. $yy'' + (y')^2 = 1$.

4172. $yy'' = (y')^2$.

4173. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

4174. $y(1 - \ln y) y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.

4175. $y'' = 2yy'$.

4176. $\cos y \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin y \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{dy}{dx}$.

4177. $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.

4178. $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$.

4179. $y''=y'\left(\frac{y'}{y}-2\sqrt{\frac{y'}{y}-4}\right).$

4180. $(x+a)\,y''+x\,(y')^2=y'.$ **4181*.** $yy'y''=(y')^3+(y'')^2.$

4182. $xy''-\frac{1}{4}(y'')^2-y'=0.$

U zadacima 4183—4188 rešiti date jednačine pomoću pogodne smene: $yy'=p,\ (y')^2=p,\ xy'=p,\ \frac{y'}{y}=p$ i t. sl.

4183. $xyy''+x\,(y')^2=3\,yy'.$ **4184.** $xy''=y'\,(e^y-1).$

4185. $yy''+(y')^2=x.$ **4186.** $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{y}{x^2}=0.$

4187. $x^2y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=0.$ **4188.** $yy''=y'\,(2\sqrt{yy'}-y').$

U zadacima 4189—4199 naći partikularna rešenja datih jednačina za navedene početne uslove.

4189. $y''(x^2+1)=2xy';$ $y|_{x=0}=1,$ $y'|_{x=0}=3.$

4190. $xy''+x\,(y')^2-y'=0;$ $y|_{x=2}=2,$ $y'|_{x=2}=1.$

4191. $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}:$ $y|_{x=2}=0,$ $y'|_{x=2}=4.$

4192. $2y''=3y^2;$ $y|_{x=-2}=1,$ $y'|_{x=-2}=-1.$

4193. $yy''=(y')^2-(y')^3;$ $y|_{x=1}=1,$ $y'|_{x=1}=-1.$

4194. $y^3y''=-1;$ $y|_{x=1}=1,$ $y'|_{x=1}=0.$

4195. $y^4-y^3y''=1;$ $y|_{x=0}=\sqrt{2},$ $y'|_{x=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

4196. $y''=e^{2y};$ $y|_{x=0}=0,$ $y'|_{x=0}=1.$

4197. $2\,(y')^2=y''\,(y-1);$ $y|_{x=1}=2,$ $y'|_{x=1}=-1.$

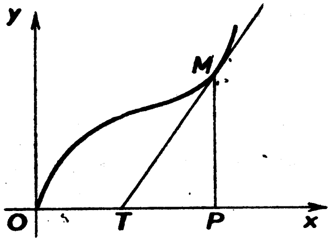
4198*. $x^4y''=(y-xy')^3,$ $y|_{x=1}=1,$ $y'|_{x=1}=1.$

4199. $y''=xy'+y+1;$ $y|_{x=0}=1,$ $y'|_{x=0}=0.$

4200*. Koja kriva ima tu osobinu da je poluprečnik krivine u bilo kojoj njenoj tački proporcionalan dužini normale krive u toj tački?

4201. Naći krivu kod koje projekcija poluprečnika krivine na y-osu ima konstantnu vrednost a.

4202. Naći krivu koja prolazi kroz koordinatni početak i kod koje odnos površine trougla MTP (sl. 70), obrazovnog tangentom krive u tački M, ordinatom te tačke i apscisnom osom, prema površini krivolinijskog trougla OMP, ima konstantnu vrednost k $\left(k > \frac{1}{2}\right)$.



Sl. 70

4203. Naći krivu kod koje je dužina luka, računata od neke polazne tačke, proporcionalna ugaonom koeficijentu tangente u završnoj tački luka.

4204. Materijalna tačka mase m bačena je vertikalno u vis početnom brzinom v_0; sila otpora vazduha je kv^2. Prema tome, ako se y-osa uzme u vertikalnom položaju, onda ćemo dok se tačka kreće uvis imati

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + kv^2,$$

pri čemu je $v = \frac{dy}{dt}$. Naći brzinu tačke u momentu njenog pada na zemlju.

4205. Tanak, elastičan i nerastegljiv konac obešen je za oba kraja; kakav će oblik uzeti konac u svom ravnotežnom položaju pod dejstvom opterećenja raspodeljenog ravnomerno duž projekcije konca na horizontalnu ravan? (Težina konca se zanemaruje).

4206. Naći zakon pravolinijskog kretanja materijalne tačke čija je masa m, ako se zna da je rad sile koja dejstvuje u pravcu kretanja i zavisi od puta, proporcionalan vremenu računatom od početka kretanja. (Koeficijent proporcionalnosti je k).

4207*. Svetlosni zrak iz vazduha (indeks prelamanja je m_0) pada pod upadnim uglom α_0 u tečnost promenljivog indeksa prelamanja, koji zavisi linearno od dubine, a ima konstantnu vrednost u svim tačkama ravni paralelne horizontalnoj ravni; na površini tečnosti vrednost ovog indeksa je m_1, a na dubini h njegova je vrednost m_2. Naći oblik svetlosnog zraka u tečnosti. (Indeks prelamanja sredine obrnuto je proporcionalan brzini prostiranja svetlosti).

Posebni slučajevi jednačina višeg reda

U zadacima 4208—4217 naći opšta rešenja datih jednačina.

4208. $y''' = \frac{1}{x}$. **4209.** $y''' = \cos 2x$.

4210. $y^{X} = e^{ax}$. **4211.** $x^2 y''' = (y'')^2$.

4212. $xy^{V} = y^{IV}$. **4213.** $y''' = (y'')^3$.

4214. $y'y''' = 3(y'')^2$. **4215.** $yy''' - y'y'' = 0$.

4216. $y'''[1+(y')^2]=3y'(y'')^2$.

4217. $(y'')^2-y'y'''=\left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

Približna rešenja

4218. Pri ispitivanju oscilovanja materijalnog sistema sa jednim stepenom slobode nailazi se na diferencijalnu jednačinu oblika $y''=f_1(x)+f_2(y)+f_3(y')$. Rešiti ovu jednačinu grafički ako je:

1) $f_1(x)=0$, $f_2(y)=-\sqrt{y}$, $f_3(y')=0{,}5\,y'$ i $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$;

2) $f_1(x)=-x$, $f_2(y)=0$, $f_3(y')=-0{,}1\,y'-0{,}1\,y'^3$ i $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$.

4219. $y''=yy'-x^2$; $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=1$.

1) Rešiti datu jednačinu grafički.

2) Naći nekoliko prvih članova potencijalnog reda koji predstavlja traženo partikularno rešenje.

4220. Naći šest prvih članova potencijalnog reda onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y''=\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}$ koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$.

4221. Naći u obliku potencijalnog reda partikularno rešenje jednačine $y''=x\sin y'$, koje zadovoljava početne uslove: $y|_{x=1}=0$, $y'|_{x=1}=\frac{\pi}{2}$. (Ograničiti se na šest prvih članova).

4222. Naći u obliku potencijalnog reda ono partikularno rešenje $y=f(x)$ diferencijalne jednačine $y''=xyy'$, koje zadovoljava početne uslove $f(0)=1$, $f'(0)=1$. Ako se ograničimo na pet prvih članova reda hoće li oni biti dovoljni da bi se vrednost $f(-0{,}5)$ mogla izračunati sa tačnošću do 0,001?

4223. Naći sedam prvih članova potencijalnog reda onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $yy''+y'+y=0$, koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$. Kog će reda, u odnosu na x, biti beskonačno mala veličina $y-(2-x-e^{-x})$ kad $x\to 0$?

4224. Naći 12 prvih članova potencijalnog reda onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y''+yy'-2=0$ koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$. Izračunati vrednost integrala $\int_0^1 y\,dx$ sa tačnošću do 0,001, a isto tako i vrednost $y'|_{x=0{,}5}$ sa tačnošću do 0,00001.

4225*. Električno kolo se sastoji iz samoindukcije $L=0{,}4\,H$, vezane na red sa aparatom za elektrolizu u kome se nalazi 1 litar vodenog rastvora sumporne kiseline. Pod dejstvom struje voda se razlaže i usled toga se menja koncentracija, a samim tim i električni otpor rastvora u aparatu. Na klemama se održava konstantan napon ($20\,V$). Količina materije koja se izdvaja pri elektrolizi proporcionalna je jačini struje, vremenu i elektrohemijskom ekvivalentu materije (Faradejev zakon); elektrohemijski ekvivalent vode iznosi 0,000187 g/C. Otpor rastvora u početku opita je $R_0 = 2\,\Omega$, a početna jačina struje iznosi $10\,A$. Naći (u obliku stepenog reda) zavisnost zapremine vode u aparatu — od vremena.

4226*. Električno kolo se sastoji iz samoindukcije $L = 0{,}4\,H$, vezane na red sa aparatom za elektrolizu čiji električni otpor na početku opita iznosi $2\,\Omega$. U aparatu se nalazi 1 litar vode sa 10 grama rastvorene sone kiseline. Pod dejstvom struje kiselina se razlaže i usled toga se menja koncentracija rastvora (Uporedi sa prethodnim zadatkom, u kojem se količina rastvorene kiseline nije menjala, ali se menjala zapremina rastvarača.). Napon na krajevima kola je $20\,V$, elektrolitički ekvivalent k sone kiseline je 0,000381 g/C, a početna jačina struje iznosi $10\,A$. Naći (u obliku stepenog reda) zavisnost količine sone kiseline u rastvoru — od vremena.

§ 4. Linearne jednačine

4227. Funkcije x^3 i x^4 zadovoljavaju neku homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda; uveriti se da one obrazuju fundamentalni sistem rešenja te jednačine, i sastaviti samu jednačinu.

4228. Isto to za funkcije e^x i x^2e^x.

4229. Funkcije x, x^3 i e^x obrazuju fundamentalni sistem rešenja linearne homogene jednačine trećeg reda; sastaviti tu jednačinu.

4230. Funkcije x^2 i x^3 obrazuju fundamentalni sistem rešenja linearne homogene jednačine drugog reda; naći partikularno rešenje te jednačine koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$.

4231. Funkcije $\cos^2 x$ i $\sin^2 x$ zadovoljavaju neku linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda.

a) proveriti da li one obrazuju fundamentalni sistem rešenja te jednačine;

b) sastaviti samu jednačinu;

c) pokazati da drugi fundamentalni sistem rešenja obrazuju funkcije 1 i $\cos 2x$.

4232*. Ako je y_1 partikularno rešenje jednačine

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0,$$

onda je i

$$y_2 = Cy_1 \int e^{-\int P(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2} \quad (C \text{ je konstanta})$$

takođe rešenje iste jednačine. Pokazati to na tri načina:

1) neposrednom proverom, 2) zamenom $y = y_1 z$, 3) primenom formule Liuvil—Ostrogradskog.

4233. Primenom formule za y_2 iz prethodnog zadatka naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(1-x^2)\,y'' - 2xy' + 2y = 0$ znajući da je jedno njeno partikularno rešenje $y_1 = x$.

4234. Rešiti jednačinu $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ znajući da je jedno njeno partikularno rešenje $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

4235. Funkcija $y=e^x$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0$; naći ona partikularna rešenja ove jednačine koja zadovoljavaju početne uslove: $y|_{x=1}=0,\ y'|_{x=1}=1$.

4236*. Naći potreban i dovoljan uslov da bi jednačina $y''+y'P(x)+yQ(x)=0$ imala dva linearna nezavisna partikularna rešenja y_1 i y_2 vezana relacijom $y_1y_2=1$.

4237*. Naći opšte rešenje jednačine ako je jedno njeno partikularno rešenje polinom trećeg stepena.

U zadacima 4238—4240 lako je pogoditi jedno partikularno rešenje (različito od trivijalnog $y=0$) date jednačine: naći opšta rešenja ovih jednačina.

4238. $y''-\operatorname{tg} x\cdot y'+2y=0$.

4239. $y''-y'+\frac{y}{x}=0$.

4240. $y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2y}{x^2+1}=0$.

4241. Naći opšte rešenje jednačine

$$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0,$$

znajući njena partikularna rešenja $y_1=x$ i $y_2=x^2$.

U zadacima 4242—4244 naći opšta rešenja datih nehomogenih jednačina.

4242. $x^2y''-xy'+y=4x^3$.

4243. $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=x-1$.

4244. $(3x+2x^2)y''-6(1+x)y'+6y=6$.

4245. Funkcija $y=x^2$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $(1+x^2)y''+2xy'-2y=4x^2+2$; naći ono partikularno rešenje ove jednačine koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=-1}=0,\ y'|_{x=-1}=0$.

4246. Naći šest prvih članova potencijalnog reda onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y''-(1+x^2)y=0$ koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=0}=-2,\ y'|_{x=0}=2$.

4247. Naći devet prvih članova potencijalnog reda onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y''=x^2y-y'$ koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=0$.

4248. Napisati u obliku potencijalnog reda ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y''-xy'+y-1=0$ koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=0$.

4249. Napisati u obliku potencijalnog reda opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''=y\cdot e^x$. (Ograničiti se na šest prvih članova).

4250. Napisati u obliku potencijalnog reda opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''+xy'-x^2y=0$. (Ograničiti se na šest prvih članova.)

Jednačine sa konstantnim koeficijentima

U zadacima 4251—4261 naći opšta rešenja datih jednačina.

4251. $y''+y'-2y=0$.

4252. $y''-9y=0$.

4253. $y''-4y'=0$.

4254. $y''-2y-y=0$.

4255. $3y''-2y'-8y=0$.

4256. $y''+y=0$.

4257. $y''+6y'+13y=0$.

4258. $4y''-8y'+5y=0$.

4259. $y''-2y'+y=0$.

4260. $4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0$.

4261. $2y''+y'+2\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ \cdot y=0$.

U zadacima 4262—4264 naći partikularna rešenja datih jednačina koja zadovoljavaju navedene početne uslove.

4262. $y''-4y'+3y=0$; $\quad y|_{x=0}=6$, $\quad y'|_{x=0}=10$.

4263. $y''+4y'+29y=0$; $\quad y|_{x=0}=0$, $\quad y'|_{x=0}=15$.

4264. $4y''+4y'+y=0$; $\quad y|_{x=0}=2$, $\quad y'|_{x=0}=0$.

4265. Funkcija $y_1=e^{mx}$ zadovoljava neku linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima za koju je diskriminanta odgovarajuće karakteristične jednačine jednaka nuli; naći ono partikularno rešenje $y(x)$ te jednačine koje zadovoljava početne uslove $y(0)=y'(0)=0$.

4266. Naći onu integracionu krivu diferencijalne jednačine $y''+9y=0$ koja prolazi kroz tačku $M(\pi, -1)$ i u toj tački dodiruje pravu $y+1=x-\pi$.

4267. Naći onu integralnu krivu dferencijalne jednačine $y''+ky=0$ koja prolazi kroz tačku $M(x_0, y_0)$ i u toj tački dodiruje pravu $y-y_0=a(x-x_0)$.

U zadacima 4268 — 4282 naći opšta rešenja datih nehomogenih jednačina našavši po jedno partikularno rešenje bilo probanjem, bilo metodom varijacije konstanata.

4268. $2y''+y'-y=2e^x$.

4269. $y''+a^2y=e^x$.

4270. $y''-7y'+6y=\sin x$.

4271. $y''+2y'+5y=-\dfrac{17}{2}\cos 2x$.

4272. $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$.

4273. $y''-2y'+2y=2x$.

4274. $y''+4y'-5y=1$.

4275. $y''-3y'+2y=f(x)$, ako je $f(x)$ funkcija:

1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\sin x$; 4) $2x^3-30$; 5) $2e^x\cos\dfrac{x}{2}$;

6) $x-e^{-2x}+1$; 7) $e^x(3-4x)$; 8) $3x+5\sin 2x$;

9) $2e^x-e^{-2x}$; 10) $\sin x\sin 2x$; 11) $\operatorname{sh} x$.

4276. $2y''+5y'=f(\text{k})$, ako je $f(x)$ funkcija:

1) $5x^2-2x-1$; 2) e^x; 3) $29\cos x$; 4) $\cos^2 x$;

5) $0{,}1e^{-2{,}5x}-25\sin 2{,}5x$; 6) $26x\sin x$; 7) $100x\cdot e^{-x}\cos x$;

8) $3\cdot\operatorname{ch}\dfrac{5}{2}x$.

4277. $y''-4y'+4y=f(x)$, ako je $f(x)$ funkcija:

1) 1; 2) e^{-x}; 3) $3e^{2x}$; 4) $2(\sin 2x+x)$; 5) $\sin x\cos 2x$;

6) $\sin^3 x$; 7) $8(x^3+e^{2x}+\sin 2x)$; 8) $\operatorname{sh} 2x$; 9) $\operatorname{sh} x+\sin x$;

10) $e^x-\operatorname{sh}(x-1)$.

4278. $y''+y=f(x)$, ako je $f(x)$ funkcija:

1) $2x^3-x+2$; 2) $-8\cos 3x$; 3) $\cos x$; 4) $\sin x-2e^{-x}$;

5) $\cos x\cos 2x$; 6) $24\sin^4 x$; 7) $\operatorname{ch} x$.

4279. $5y''-6y'+5y=f(x)$ funkcija:

1) $5e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\sin\dfrac{4}{5}x$; 3) $e^{2x}+2x^3-x+2$; 4) $e^{\frac{3}{5}x}\cdot\cos x$;

5) $e^{\frac{5}{3}x}\ \sin\dfrac{4}{5}x$; 6) $13e^x\cdot\operatorname{ch} x$.

4280. $y''+y+\operatorname{ctg}^2 x=0$. **4281.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

4282. $y''-y=f(x)$ ako je $f(x)$ funkcija:

1) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$; 2) $e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$; 3) $e^{2x}\cos e^x$.

U zadacima 4283—4287 naći ona partikularna rešenja datih jednačina koja zadovoljavaju navedene početne uslove.

4283. $4y''+16y'+15y=4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y|_{x=0}=3$, $y'|_{x=0}=-5{,}5$.

4284. $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6$; $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=3{,}2$.

4285. $y''-y'=2(1-x)$; $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=1$.

4286. $y''-2y=e^x(x^2+x-3)$; $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=2$.

4287. $y''+y+\sin x=0$; $y|_{x=\pi}=y'|_{x=\pi}=1$.

4288*. Pokazati da: jedno partikularno rešenje $\bar{y}$ diferencijalne jednačine $a_0y''+a_1y'+a_2y=Ae^{px}$ (a_0, a_1, a_2 su konstantni koeficijenti, a p i A su realni ili kompleksni brojevi) ima oblik $\bar{y}=\dfrac{A}{\varphi(p)}e^{px}$ — ako p nije koren karakteristične jednačine $\varphi(r)\equiv a_0r^2+a_1r+a_2=0$; ako je, pak, p prosti koren karakteristične jednačine partikularno rešenje je $\bar{y}=\dfrac{Ax}{\varphi'(p)}e^{px}$, a ako je p dvostruki koren karakteristične jednačine onda je karakteristično rešenje $\bar{y}=\dfrac{Ax^2}{\varphi''(p)}e^{px}$

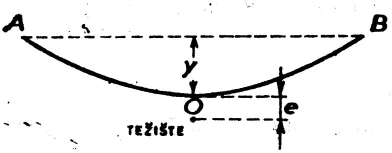
U zadacima 4289—4292 naći opšte rešenje datih Ojlerovih jednačina.

4289. $x^2y''-9xy'+21y=0.$ **4290.** $x^2y''+xy'+y=x.$

4291. $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}.$

4292. $x^2y''-2xy'+2y+x-2x^3=0.$

4293. Ako osa vratila turbine leži horizontalno, i ako težište diska, nabijenog na vratilo, ne leži na osi, onda izvijanje vratila (sl. 71) pri njegovom obrtanju zadovoljava diferencijalnu jednačinu



Sl. 71.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{1}{m\alpha}-\omega^2\right)y=g\cdot\cos\omega t+\omega^2 e,$$

u kojoj je: m — masa diska, α — konstanta koja zavisi od vrste ležišta na krajevima A i B, ω — ugaona brzina obrtanja, i e — ekscentricitet težišta diska; naći opšti integral ove jednačine.

4294. Materijalna tačka mase $1\,g$ odbija se pravolinijski od nekog centra, pod dejstvom sile proporcionalne odstojanju tačke od tog centra (vrednost koeficijenta proporcionalnosti je 4); sila otpora sredine je proporcionalna brzini kretanja (vrednost koeficijenta proporcionalnosti je 3). U početku kretanja odstojanje tačke od centra bilo je $1\,cm$, a brzina — nula; naći zakon kretanja.

4295. Čestica mase $1\,g$ kreće se pravolinijski prema tački A pod dejstvom neke privlačne sile proporcionalne odstojanju od tačke A; na udaljenosti od $1\,cm$ jačina privlačne sile je $0{,}1\,dyn$. Otpor sredine proporcionalan je brzini kretanja, i pri brzini od $1\,cm/sec$ on iznosi $0{,}4\,dyn$. U trenutku $t=0$ odstojanje čestice od tačke A bilo je $10\,cm$, a brzina — nula. Naći zavisnost odstojanja od vremena i izračunati vrednost odstojanja za $t=3\,sec$ (sa tačnošću do $0{,}01\,cm$).

4296. Tačkasta masa m kreće se pravolinijski od A prema B pod dejstvom konstantne sile F; otpor sredine je proporcionalan odstojanju od tačke B i u početnom momentu (tj. u tački A) njegova je vrednost $f\,(f<F)$, dok je početna brzina tačke — nula. Koliko će vremena trajati kretanje tačke iz A u B? $(AB=a)$.

4297. Telo mase $200\,g$ obešeno je o oprugu i izvedeno iz ravnotežnog položaja istezanjem opruge za $2\,cm$, a zatim otpušteno (bez početne brzine); naći jednačinu kretanja tela uzimajući da je otpor sredine proporcionalan brzini kretanja i da pri brzini od $1\,cm/sec$ otpor sredine iznosi 1 pond*), a da elastična sila opruge pri istezanju od $2\,cm$ iznosi 10 kiloponda. (Težina opruge se zanemaruje.).

4298. Drvena cilindrična oblica ($S=100\,cm^2$, $h=20\,cm$, $\gamma=0{,}5\,g/cm^3$) zagnjurena je potpuno u vodu, a zatim otpuštena bez početne brzine. Uzimajući da je sila trenja proporcionalna visini potopljenog dela utvrditi koliki mora biti koeficijent proporcionalnosti k da bi pri prvom iskakanju iz vode izronila tačno polovina oblice.

Koliko će vremena (t_1) trajati izdizanje pri prvom iskakanju, i kakva će biti jednačina kretanja za vreme tog iskakanja?

4299*. Uska dugačka cev obrće se konstantnom ugaonom brzinom oko vertikalne ose normalne na cev. U početnom momentu na odstojanju a_0 od ose u cevi se nalazila kuglica mase m. Uzimajući da je u početnom momentu brzina kuglice u odnosu na cev bila nula, naći zakon relativnog kretanja kuglice.

4300. Rešiti prethodni zadatak uzimajući da je kuglica pričvršćena oprugom u tački O; sila kojom opruga dejstvuje na kuglicu proporcionalna je deformaciji opruge, pri čemu sila od k diña izaziva istezanje opruge za 1 cm, a dužina opruge u slobodnom stanju je a_0.

Jednačine višeg reda

U zadacima 4301—4311 naći opšta rešenja datih jednačina.

4301. $y''' + 9y' = 0$.

4302. $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$.

4303. $y^{(IV)} = 8y'' - 16y$.

4304. $y^{(IV)} = 16y$.

4305. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

4306. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

4307. $y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 0$.

4308. $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

4309. $y^{(IV)} + y = 0$.

4310. $64y^{(VIII)} + 48y^{(VI)} + 12y^{(IV)} + y'' = 0$.

4311. $y^{(n)} + \frac{n}{1}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)} + \cdots + \frac{n}{1}y' + y = 0$.

U zadacima 4312 — 4313 naći partikularna rešenja datih diferencijalnih jednačina koje zadovoljavaju date početne uslove.

4312. $y''' = -y'$; $y_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = -1$.

4313. $y^{(V)} = y'$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 0$,

$$y'''|_{x=0} = 1,\quad y^{(IV)}|_{x=0} = 2.$$

U zadacima 4314—4320 sastaviti opšta rešenja datih nehomogenih jednačina, našavši njihova partikularna rešenja bilo probanjem, bilo metodom varijacije konstanata.

4314. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

4315. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

4316. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x$.

4317. $y^{(IV)} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax$.

4318. $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1$.

4319. $y^{(IV)}-y=xe^{x}+\cos x$.

4320. $y^{(IV)}-2y''+y=8(e^{x}+e^{-x})+4(\sin x+\cos x)$.

4321. $y'''+2y''+y+2e^{-2x}=0;\quad y|_{x=0}=2,\ y|_{x=0}=1,\ y''|_{x=0}=1$.

4322. $y'''-y'=3(2-x^{2});\ y'|_{x=0}=y'|_{x=0}=y''|_{x=0}=1$.

4323. Rešiti Ojlerovu jednačinu $x^{3}y'''+xy'-y=0$.

§. 5. Sistemi diferencijalnih jednačina

4324.1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-7x,\\ \dfrac{dy}{dt}+2x+5y=0.\end{cases}$

4324.2. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y.\end{cases}$

4324.3. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-3y.\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y.\end{cases}$

4324.4. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y-z,\\ \dfrac{dz}{dt}=2x-y.\end{cases}$

4324.5. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y-z,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x-z.\end{cases}$

4324.6. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=4x-y+4z,\end{cases}$ (koreni karakteristične jednačine su $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=5$

4324.7. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y-z,\\ \dfrac{dz}{dt}=2y+3z-x\end{cases}$ koreni karakteristične jednačine su: $r_1=2,\ r_{2,3}=3\pm i$.

4325. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} yzy' = x \left(y' = \dfrac{dy}{dx} \right), \\ y^2 z' = x \left(z' = \dfrac{dz}{dx} \right). \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{z}, \\ z' = \dfrac{x-y}{y}. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

4330. $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ z' = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} z = y'(z-y)^2, \\ y = z'(z-y)^2. \end{cases}$

4332. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = x, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = y. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 1. \end{cases}$

4335. $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{yx}.$

U zadacima 4336—4339 naći partikularna rešenja sistema diferencijalnih jednačina, koja zadovoljavaju navedene početne uslove.

4336. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yz}{x^2 - yz}, \quad y|_{x=0} = 1; \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x+y)}{x^2 - yz}, \quad z|_{x=0} = -1. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{2x}{t}, & x|_{t=1}=\dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y-1+\dfrac{2x}{t}, & y|_{t=1}=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=z+y-x, & \\ \dfrac{dy}{dt}=z+x-y, & x|_{t=0}=1; \quad y|_{t=0}=z|_{t=0}=0 \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y+z, & \end{cases}$

4339. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+z, & x|_{t=0}=-1; \\ \dfrac{dx}{dt}=z+x, & y|_{t=0}=1; \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y, & z|_{t=0}=0. \end{cases}$

4340. Naći par krivih koje se odlikuju sledećim osobinama: a) tangente povučene u tačkama sa istom apscisom seku se na ordinatnoj osi; normale povučene u tačkama sa istom apscisom seku se na apscisnoj osi; c) jedna od krivih prolazi kroz tačku (1, 1), a druga kroz tačku (1, 2).

4341. Krive $y=f(x)$ i $y=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ imaju sledeće osobine: prva prolazi kroz tačku (0, 1), a druga kroz tačku $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$; tangente obe krive, povučene u tačkama sa istom apscisom, seku se na apscisnoj osi. Naći krivu $y=f(x)$.

4342. Naći prostornu krivu koja prolazi kroz tačku (0, 1, 1) i ima sledeće osobine: a) tačke prodora njenih tangenata kroz ravan Oxy leže na simetrali prvog kvandranta te ravni; b) odstojanje svake od tih tačaka prodora od koordinatnog početka jednako je aplikati z odgovarajuće tačke dodira.

4343. Dve kuglice, od kojih svaka ima masu m, vezane su sasvim lakom oprugom (njeno istezanje je proporcionalno sili koja ga izaziva); dužina nezategnute opruge je l_0. Opruga je istegnuta do dužine l_1, a zatim u trenutku $t=0$ obe kuglice, postavljene vertikalno jedna iznad druge, počinju da padaju (otpor sredine se zanemaruje). U toku T sekundi dužina opruge se smanjuje na l_0. Naći zakon kretanja svake kuglice.

4344. Horizontalna cev obrće se oko vertikalne ose ugaonom brzinom od 2 radijana u sekundi. U cevi se nalaze dve kuglice čije su mase 300 g i 200 g, vezane sasvim lakom nezategnutom elastičnom oprugom dužine 10 cm, pri čemu kuglica sa većom masom leži dalje od ose obrtanja. Sila jačine 0,24 N isteže oprugu za 10 cm. Kuglice se posebnim mehanizmom zadržavaju u opisanom položaju. U momentu od kojeg počinjemo da merimo vreme dejstvo mehanizma prestaje i kuglice počinju da se kreću. Naći zakon kretanja svake kuglice u odnosu na cevčicu (trenje se zanemaruje).

4345. Brzina rašćenja kulture mikroorganizama proporcionalna je njihovoj količini i količini hranljivih sastojaka (koeficijent proporcionalnosti je k); brzina smanjivanja hranljivih sastojaka proporcionalna je prisutnoj količini mikroorganizama (koeficijenat proporcionalnosti je k_1). U početku opita u sudu je bilo A_0 grama mikroorganizama i B_0 grama hranljivih sastojaka; naći zavisnost količine A mikroorganizama i količine B hranljivih sastojaka od vremena ($k>0$, $k_1>0$).

4346*. Predpostavimo da se bakterije razmnožavaju brzinom koja je proporcionalna prisutnoj količini bakterija (koeficijent proporcionalnosti je a), ali da one u usto vreme proizvode otrov koji ih uništava brzinom proporcionalnom količini otrova i prisutnoj količini bakterija (koeficijent proporcionalnosti je b). Predpostavimo, dalje, da je brzina stvaranja otrova proporcionalna prisutnoj količini bakterija (koeficijent proporcionalnosti je c). Broj bakterija u početku raste do neke maksimalne vrednosti, a zatim opada težeći nuli. Pokazati da je broj N bakterija u bilo kom trenutku t određen obrascem

$$N=\frac{4M}{(e^{kt}+e^{-kt})^2},$$

u kojem je M — maksimalan broj bakterija, t — vreme mereno od onog momenta kada je $M=N$, a k je neka konstanta.

4347. Dva cilindra, čije osnove leže u istoj ravni, povezani pri dnu kapilarnom cevčicom, napunjeni su tečnošću do raznih visina (H_1 i H_2). Kroz cevčicu protiče u jedinici vremena zapremina tečnosti proporcionalna razlici visina, tj. ravna $\alpha(H_1-H_2)$ pri čemu je α koeficijent proporcionalnosti. Naći zakon po kome se menjaju visine tečnosti (u sudovima) iznad kapilarne cevčice. Poprečni preseci sudova su S_1 i S_2.

§ 6. Numerički zadaci

4348. 1 kg vode, čiji se toplotni kapacitet smatra konstantnim $\left(1\frac{k\,cal}{{}^\circ C}\right)$ a početna temperatura je θ_0 zagreva se električnim grejačem zagnjurenim u vodu; otpor R grejača zavisi linearno od temperature θ: $R=R_0(1+0{,}004\,\theta)$, pri čemu je R_0 otpor na 0°C (ovaj zakon važi za većinu čistih metala). Termička izolacija suda je toliko dobra da se gubitak toplote usled zračenja može zanemariti.

Naći zavisnost temperature θ od vremena t u intervalu $0\leqslant t\leqslant T$:

1) ako se napon E uvodi ravnomerno od vrednosti $E=0$ do vrednosti $E=E_1$ u toku T sekundi. Izračunati sa tačnošću do 1° za koliko će se stepeni povisiti temperatura vode do kraja 10-og minuta, ako je: $\theta_0=0\,°C$, $E_1=110\,V$, $R_0=10\,\Omega$ i $T=10\,min$.

2) ako se napon menja shodno obrascu: $E=E_0 \sin 100\pi t$. Izračunati sa tačnošću do 1° za koliko će se stepeni povisiti temperatura vode do kraja 10-tog minnta ako je: $\theta_0=0\,°C$, $E_0=110\,V$ i $R_0=10\,\Omega$.

4349. Litar vode zagreva se spiralom čiji je otpor $24\,\Omega$; u toku zagrevanja voda odaje toplotu okolnoj sredini čija je temperatura 20 °C (brzina hlađenja proporcionalna je razlici temperatura tela i okolne sredine). Zna se takođe da ako se struja isključi, temperatura vode se spusti sa 40 °C na 30 °C u toku 10 minuta. Početna temperatura vode je 20 °C. Do koje će se temperature zagrejati voda za 10 *min*:

1) ako se napon uvodi ravnomerno od vrednosti $E_0=0$ do vrednosti $E_1=120\,V$ u toku 10 *min*? Računati sa tačnošću do 0,1°.

2) ako je struja naizmenična i napon se menja po obrascu $E=110\cdot\sin 100\pi t$? Računati sa tačnošću do 0,1°.

4350. Data je jednačina $y'=\frac{x}{y}-x^2$. Sastaviti tablicu vrednosti onog partikularnog rešenja koje zadovoljava početni uslov $y|_{x=1}=1$, dajući promenljivoj x redom vrednosti od 1 do 1,5 sa razmakom od 0,05. Račune izvoditi sa tačnošću do 0,001.

4351. Izračunati za $x=1$ vrednost onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y'=y+x$ koje zadovoljava početni uslov $y|_{x=0}=1$. Izračunati zatim pet prvih aproksimacija y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (na četiri decimale) po metodu sukcesivnih aproksimacija, i uporediti rezultate.

4352. Poznato je da se integral $\int e^{-x^2}dx$ ne može izraziti u konačnom vidu pomoću elementarnih funkcija. Koristeći činjenicu da funkcija $y=e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-x^2}dx$ predstavlja partikularno rešenje jednačine $y'=2xy+1$, izračunati $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx$. Primeniti metod sukcesivnih aproksimacija idući do pete aproksimacije, i uporediti rezultat sa onim koji se dobija po Simpsonovu pravilu.

4353. Funkcija $y'=f(x)$ je partikalno rešenje diferencijalne jednačine $y'=y^2-x$ koje zadovoljava početni uslov $y|_{x=0}=1$. Metodom sukcesivnih aproksimacija naći četvrtu aproksimaciju (y_4) zadržavajući pri tom onoliko sabiraka koliko je potrebno da bi se izračunala vrednost $y_4(0,3)$ na tri decimale. Naći zatim nekoliko prvih članova stepenog reda funkcije $f(x)$, pa pomoću njega izračunati vrednost $f(0,3)$ takođe na tri decimale, i smatrajući ovaj rezultat tačnim — oceniti grešku dobijene vrednosti $y_4(0,3)$.

4354. Funkcija $y=f(x)$ je partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y''=\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}$ koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=1}=1$, $y^1|_{x=1}=0$; naći $f(1,6)$ sa tačnošću do 0,001.

4355*. Funkcija $y=f(x)$ je partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y''=y'-y+x$ koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$. Naći $f(1,21)$ sa tačnošću do 0,000001.

4356*. Funkcija $y=f(x)$ je partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y''=xy'-y+e^x$ koje zadovoljava početne uslove $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$. Naći $f\left(\frac{1}{2}\right)$ sa tačnošću do 0,0001.

4357. Jednačina krive linije ima oblik $y=f(x)$; naći stepeni red funkcije $f(x)$ znajući da ona zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y''=xy$ i početne uslove $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$, i izračunati sa tačnošću do 0,0001 krivinu krive u tački sa apcisom 1.

REZULTATI

3901. $1+y^2=C(1-x^2)$. **3902.** $x^2+y^2=\ln Cx^2$.

3903. $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^3}$. **3904.** $y=C\sin x-a$.

3905. $Cx=\dfrac{y-1}{y}$. **3906.** $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$.

3907. $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$. **3908.** $e^t=C(1-e^{-s})$.

3909. $10^x+10^{-y}=C$. **3910.** $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{4}\right|=C-2\sin\dfrac{x}{2}$.

3911. $l=\dfrac{1}{a}\left(l+\dfrac{b\cdot l^{1-n}}{1-n}\right)$. **3912.** $t=\dfrac{v^2}{2\sqrt{k_1k_2}}\ln\dfrac{\sqrt{k_1}(1-x)+x\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}(1-x)-x\sqrt{k_2}}$.

3913. $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **3914.** $y=\dfrac{1+x}{1-y}$. **3915.** $\cos x=\sqrt{2}\cos y$.

3916. $y=\dfrac{b+x}{1+bx}$. **3917.** Hiperbola $xy=6$.

3918. Traktrisa $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\left|\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$.

3919. Parabola $y^2=Cx$. **3920.** $y^k=Cx$. **3921.** $y=e^{\frac{x-a}{a}}$

3922. $(x-C)^2+y^2=a^2$. **3923.** $y=\frac{1}{k}\ln|C(k^2x^2-1)|$.

3924. $x=y^n$. **3925.** $\approx 2{,}7\frac{m}{sek}$. **3927.** $0{,}467\frac{km}{čas}$; $85{,}2\ m$.

3928. $H=\left[\sqrt{h}-\frac{\sqrt{2g}}{4S}qT\right]^2$. **3929.** $\ln\left|\frac{\theta_0-\theta_1}{\theta-\theta_1}\right|=\frac{k_0}{2}(2t+\alpha t^2)$.

3930*. Ako je t vreme računato od ponoći i izraženo u satima, onda diferencijalna jednačina zadatka ima oblik

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}}=k\cos\frac{\pi(t-12)}{12}dt;\quad \text{odavde je}\quad S=\frac{160000}{\left[9-\sin\frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}.$$

Funkcija $S(t)$ je definisana za $6\leqslant t\leqslant 18$.

3931. $x+\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=C$. **3932.** $4y-6x-7=Ce^{-2x}$.

3933. $x+C=2u+\frac{2}{3}\ln|u-1|-\frac{8}{3}\ln(u+2)$, gde je $u=\sqrt{1+x+y}$.

3934. $y-2x=Cx^3(y+x)$. **3035.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$.

3936. $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$. **3937.** x^2+y^2+Cy. **3938.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

3939. $x^2=C^2+2Cy$. **3940.** $e^{\frac{y}{x}}=Cy$. **3941.** $\ln|Cx|=-e^{-\frac{y}{x}}$.

3942. $y=xe^{1+Cx}$. **3943.** $(x+y)^2=Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$

3944. $Cx=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **3945.** $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ **3946.** $y^3=y^2-x^2$.

3947. $y=-x$. **3948.** $y^2=5\pm 2\sqrt{5}\cdot x$.

3949. Ako $\frac{y}{x}=u$, to $\ln|x|=\int\frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}$; $\varphi\left(\frac{1}{u}\right)=-u^2$ ili $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}$.

3950. $x=Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$ **3951.** $x=y\ln|Cy|$. **3952.** $x^2=2Cy+C^2$.

3953*. Oblik obrtnog paraboloida. Neka ravan Oxy bude meridijanska ravan površine ogledala; u toj ravni leži tražena kriva čija se diferencijalna jednačina dobija kad se izjednače tangensi upadnog i odbojnog ugla, izraženi pomoću x, y i y'.

3954. $y=Ce^{-2x}+2x-1$. **3955.** $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$.

3956. $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$. **3957.** $y=(x+C)(1+x^2)$.

3958. $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

3959. Ako je $m \neq -a$, onda je $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$; ako je $m = -a$, onda je $y = (C+x)e^{mx}$.

3960. $y^2 - 2x = Cy^3$ **3961.** $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$. **3962.** $x = y \ln y + \frac{C}{y}$.

3963. $y = e^x \left(\ln |x| + \frac{x^2}{2} \right) + Ce^x$. **3964.** $y = Ce^{-\Phi(x)} + \Phi(x) - 1$. **3965.** $y = \frac{x}{\cos x}$.

3966. $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$. **3967.** $y = \frac{x}{x+1}(x - 1 + \ln |x|)$.

3968. $x = -t \operatorname{arctg} t$. **3969.** b) $\alpha + \beta = 1$. **3971.** $y = Cx - x \ln |x| - 2$.

3972*. $y + Cx \pm \frac{a^2}{2x}$. Diferencijalna jednačina zadataka je $|xy - x^2 y'| = a^2$

3973*. $x = Cy \pm \frac{a^2}{y}$. Diferencijalna jednačina zadataka je $\left| xy - y^2 \frac{dx}{dy} \right| = 2a^2$.

3974. $v = \frac{k_1}{k} \left(t - \frac{m}{k} + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} \right)$.

3975. $v = (v_0 + b) e^{-at^2} + b(at^2 - 1)$, gde je $a = \frac{k_1}{2m}$, $b = \frac{2km}{k_1^2}$.

3976. $\theta - \theta_0 = e^{-kt} \int_0^t \varphi(t) e^{kt}\, dt$. **3977.** $9{,}03\, a$.

3978. $I = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot [\omega L e^{-\frac{Rt}{L}} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t]$.

3979. $x = Ce^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$. **3980.** $y = Cx^2 + \frac{1}{x}$.

3981. $y = \frac{C}{x} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{(1 + x^2)^2}{3x}$. **3982.** $y = Cx - 1$.

3983. $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$. **3984.** $(x + y)^2 (2x + y)^3 = C$.

3985. $x = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$. **3986.** $\sin \frac{y}{x} = Cx$.

3987. $\sin \frac{y}{x} + \ln |x| = C$. **3988.** $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$.

3989. $y(y - 2x)^3 = C(y - x)^2$. **3990.** $x = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y)$.

3991. $x = y^2 (1 + Ce^{\frac{1}{y}})$. **3992.** $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

3993. $y = (C + e^x)(1 + x)^n$. **3994.** $y^4 = 4xy + C$.

3995. $y = C \cdot e^x$ i $y = C + \frac{x^2}{2}$. **3996*.** $y^2 = \frac{2}{3} \sin x + \frac{C}{\sin^2 x}$.

Svesti na jednačinu linearnu u odnosu na $z = y^2$.

3997. $\operatorname{arctg}(x + y) = x + C$. **3999.** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4} + \ln 2$.

4000. $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}[2+x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x]$.

4001. $(1+y)e^{-y}=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$. **4002.** $y=\frac{5}{3}e^{x^3}-\frac{1}{3}(2+x^3)$.

4004. $y=\frac{1}{2k}[e^{kx+C}+e^{-(kx+C)}]$. **4005.** $x^2+y^2=Cx$.

4006. $(y-x)^2(x+2y)=1$. **4007.** Parabola $y=x+Cx^2$.

4008. $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. **4009.** Lančanica. **4010.** $y=Cx^2$.

4011*. Snop pravih $y-y_0=C(x-x_0)$. Diferencijalna jednačina je $y-y_0=y'(x-x_0)$.

4012. Krug sa centrom u tački (x_0, y_0): $x^2+y^2=2(xx_0+yy_0)$.

4013. Bilo koji krug sa centrom na y-osi, koji dodiruje x-osu.

4014. Ako je put S a vreme t, onda je $S=S_0+Ce^{-k_2t}-\frac{k_1}{k_2^2}+\frac{k_1}{2k_2}t^2$ pri čemu je S_0 početni put, a k_1 i k_2 su koeficijenti proporcionalnosti.

4016. 1) $\frac{8}{9}$ obrta u sekundi; 2) posle 6 *min* 18 *sec*.

4017. 0,00082.

4018*. $v=v_0\left(1-\frac{m}{M_0}t\right)^{-1}e^{-\frac{3f_0}{mv_0}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}t}\right)}$.

Aktivna sila F je jednaka $\frac{d(m\cdot v)}{dt}$. Pri rešavanju ovog i sledeća dva zadatka treba uzeti u obzir da je masa m promenljiva veličina koja zavisi od vremena t; brzina v je tražena funkcija.

4019*. $v=\frac{g}{2m-k}(M_0-mt)\left[\left(1-\frac{m}{M_0}t\right)^{\frac{k}{m}-2}-1\right]$. Vidi uputstvo uz rešenje zadatka 4018.

4020*. $v=\frac{g}{\mu}e^{k_1\mu^{2/3}}\int\limits_0^t \mu e^{-k_1\mu^{2/3}}dt$, gde je $\mu=M_0-mt$, $k_1=\frac{3k}{m}\sqrt[3]{\frac{9\pi}{2\gamma^2}}$.

Vidi uputstvo uz rešenje zadatka 4018.

4021*. $y=m_0+\frac{m_0}{k_1-k_2}(k_2e^{-k_1t}-k_1e^{-k_2t})$, pri čemu je t vreme, y — količina drugog proizvoda. Ako je x količina prvog proizvoda koji se obrazuje u toku t jedinica vremena onda je $\frac{dx}{dt}=k_1(m_0-x)$; odavde dobijamo $x=x(t)$. Brzina $\frac{dy}{dt}$ obrazovanja drugog proizvoda proporcionalna je razlici $x-y$.

4022. 2,97 *kg* soli. Količina soli dostiže maksimalnu vrednost za $t=33\frac{1}{3}$ *min*, i iznosi 3,68 *kg*.

4023. $I=1+(I_0-1)e^{-t^2}$. **4024*.** $p=\frac{p_0le^{k\omega^2x^2}}{\int\limits_0^l e^{k\omega^2x^2}dx}$, pri čemu je $k=\frac{M}{2p_0lS}$.

Praktično je važan slučaj kad je ugaona brzina ω vrlo velika (centrifuge). Umesto da računamo integral u imenitelju za datu vrednost ω (on se ne može izraziti pomoću elementarnih funkcija) izračunava se $\lim\limits_{\omega\to\infty} p$ (vidi zadatak 2439). Diferencijalna jednačina zadatka ima oblik

$$S\,dp=\omega^2 x\,dm,$$

pri čemu je dm masa elementa CD. Dalje je $\gamma=2kp$ (jedan od oblika Bojl-Mariotova zakona; koeficijent proporcionalnosti označen je sa $2k$ radi uprošćenja daljeg računa); $dm=\gamma S\,dx=2\,kp\,S\,dx$. Na kraju se dobija jednačina sa razdvojivim promenljivim $\frac{dp}{p}=2k\,\omega^2 x\,dx$; njena integracija daje $p=Ce^{k\omega^2x^2}$, pri čemu je C integraciona konstanta. Dalje je

$$M=\int\limits_0^M dm=C\cdot 2kS\cdot\int\limits_0^l e^{k\omega^2x^2}\,dx,$$

odakle se dobija vrednost konstante C. Kad se ova vrednost unese u maločas izvedeni izraz za p, dobija se $p=\frac{Me^{k\omega^2x^2}}{2kS\int\limits_0^l e^{k\omega^2x^2}\,dx}$, međutim je $\gamma_0=2kp_0=\frac{M}{lS}$, $k=\frac{M}{2p_0lS}$, pa je definitivno:

$$p=\frac{p_0le^{k\omega^2x^2}}{\int\limits_0^l e^{k\omega^2x^2}\,dx}.$$

4025. $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$. **4026.** $x^2-xy+y^2+x-y=C$.

4027. $x-2y+\ln|x+y|=C$. **4028.** $e^{-\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}=C(y+2)$.

4029. $y^2=x+(x+1)\ln\frac{C}{x+1}$. **4030.** $y^2e^{-\frac{y^2}{x}}=C$.

4031. $y=\operatorname{tg}\ln|Cx|$. **4032.** $x^2y^2+1=Cy$. **4033.** $Cx=1-\frac{x}{x^2+y^2}$.

4034. $(1+Cx)e^y=1$. **4035.** $y^4+2x^2y^2+2y^2=C$.

4036. $x^2+y^2=C(y-1)^2$. **4037.** $y=x\operatorname{tg}(x+C)$.

4038. $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$. **4039.** $y=\frac{1}{(1+x)[C+\ln|1+x|]}$.

4040. $ny^n=Ce^{\frac{-nx}{a}}+nx-a$, **4041.** $x^2=y^2(C-y)$.

4042. $y(1+\ln x+Cx)=1$. **4043.** $y(x+C)=\sec x$.

4044. $y=\left(\frac{C+\ln|\cos x|}{x}+\operatorname{tg}x\right)^2$. **4045.** $y=\frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$.

4046. $y^2=Ce^{\frac{-2a}{x}}-\frac{b}{a}$. **4047.** $y=\frac{\varphi(x)}{x+C}$.

4048. 1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$; 2) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$. **4049.** $\frac{\rho-k}{\rho}=\frac{(\rho_0-k)\varphi}{\rho_0\varphi_0}$.

4050. $x^4-x^2y^2+y^4=C$. **4051.** $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$.

4052. $xe^y - y^2 = C$. 4053. $x^y = C$. 4054. $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$.

4055. $\operatorname{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C$. 4056. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C$.

4057. $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$. 4058. $x - \frac{y}{x} = C$. Integracioni faktor je $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$.

4059*. $x^2 + \frac{2x}{y} = C$; tražiti integracioni faktor u obliku funkcije $\mu(y)$.

4060. $(x^2+y^2)e^x = C$. 4061. $\frac{y^2}{2} + \frac{\ln x}{y} = C$.

4062. $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = C$. 4064. $\mu = y^{-n}e^{-(n-1)\int P(x)\,dx}$.

4065. Izraz $\frac{Y'_x - X'_y}{X - Y}$ mora biti funkcija od $(x+y)$.

4066. Izraz $\frac{Y'_x - X'_y}{xX - yY}$ mora biti funkcija od xy.

4067. $abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$. 4068. $y = \left[Ce^{\frac{(m-1)bx}{a}} - \frac{c}{b}\right]^{\frac{1}{m-1}}$

4069. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$. 4070. $\frac{2x}{x+y} + \ln|x+y| + 3\ln|y-x| = C$.

4071. $x + y = a\operatorname{tg}\left(C + \frac{y}{a}\right)$. 4072. $y^3 - 3xy = C$. 4073. $x^2 - y^2 = Cy^3$.

4074. $3x^2y + x^3y^3 = C$. 4075. $y\left(x^2 + \frac{1}{3}y^2\right) = Ce^{-x}$. 4076. $\ln|1+y| - \frac{1+y}{x} = C$.

4077. $y^2 - 1 + Cxy = 0$. 4078. $\frac{xy}{x-y} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C$.

4079. $3\sqrt{y} = C\sqrt[4]{x^2-1} + x^2 - 1$. 4080. $y = \sin x + C\cos x$.

4081. $y = \frac{2e^x}{C + e^x(\cos x + \sin x)}$. 4082. $\operatorname{tg} x - \frac{\sin y}{\sin x} = C$

4083. $xe^{\sin\frac{y}{x}} = C$. 4084. $xy\cos\frac{y}{x} = C$.

4085. $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$. 4086. $y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{C + \sin x}$.

4087. $\ln|Cx| = -e^{-\frac{x^2+y^2}{x}}$ 4088. $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

4089. $y = x\ln|Cx|$. 4090. $y^2 - by - axy = C$.

4091. Krug $x^2 + y^2 - \frac{2k}{k+1}(ax+by) = C$ (za $k \neq -1$), ili krug $x^2 + y^2 - \frac{2k}{k-1}(ax+by) = C$ (za $k \neq 1$); ako je $k = -1$ ili $k = 1$ onda — prava $ax + by = C$.

4092. Logaritamska spirala

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\pm \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

4093*. $y^2=\frac{x^4+C^4}{2x^2}$; diferencijalna jednačina zadatka je $y^2=x(x-yy')$.

4094. $I=\frac{t}{2}$.

4095. Vektor polja je u svakoj tački normalan na poteg te tačke. Integralne krive su — familija koncentričnih krugova sa centrom u koordinatnom početku, čija je jednačina $x^2+y^2=C$, a izokline — familija pravih koje prolaze kroz koordinatni početak.

4096. 1) $y'=f(x\cdot y)$; 2) $y'=f\left(\frac{y^2}{x}\right)$; 3) $y'=f(x^2+y^2)$.

4097. Prave $y=Cx$. Rezultat se može formulisati u obliku sledećeg geometrijskog stava: ako se familija parabola sa zajedničkom osom simetrije i zajedničkim temenom, preseče pravom koja prolazi kroz teme, onda će tangente ovih parabola, povučene u tačkama preseka sa pomenutom pravom, biti paralelne.

4099. $y'=\frac{ay+b}{x}+C$; $y'=ay+bx+C$.

4103. Za $\Delta x=0{,}05$ $y\approx 0{,}31$. **4104.** Za $\Delta x=0{,}05$ $y\approx 1{,}68$.

4105. Tačno rešenje je $y=e^{\frac{x^2}{4}}=f(x)$; $f(0{,}9)=1{,}2244$. Približno rešenje je $f(0{,}9)=1{,}1942$; relativna greška je $\sim 2{,}5\%$.

4106. Iz tačnog rešenja je $x=\sqrt[3]{3(e-1)}\approx 1{,}727$; numerička integracija pri podeli intervala na 4 dela daje $x\approx 1.72$.

4107. $y_2=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{18}x^6+\frac{1}{63}x^7$.

4108. $-1{,}28$. **4109.** $y=1+x+x^2+2x^3+\frac{13}{4}x^4+\cdots$

4110. $y=1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}+\cdots$

4111. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot 9}x^7-\frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}-\cdots$

4112. $y=1+2x-x^2+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\cdots$

4113. $y=0$. **4114.** $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$

4115. $y=-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^6}{6!}-\cdots$

4116. $y=1+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{2(x-1)^3}{3!}+\frac{4(x-1)^4}{4!}-\frac{60(x-1)^5}{5!}+\cdots$

4117. $y=Cx+C^2$; singularni integral je $x^2+4y=0$.

4118. $y=Cx-3C^3$; singularni integral je $9y\pm 2x\sqrt{x}=0$.

4119. $y=Cx+\frac{1}{C}$; singularni integral je $y^2=4x$.

4120. $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$; singularni integral je $x^2+y^2=1$.

4121. $y=Cx+\sin C$; singularno rešenje je $y=x(\pi-\arccos x)+\sqrt{1-x^2}$.

4122. $y=Cx-\ln C$; singularno rešenje $y=\ln x+1$.

4123. $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$; singularno rešenje je $y=0$.

4124. $y=Cx^2+\frac{1}{C}$; singularni integral je $y^2-4x^2=0$.

4125. $2Cx=C^2-y^2$; singularnog integrala nema.

4126. $x=Ce^{-p}+2(1-p)$, $y=x(1+p)+p^2$; nema singularnog integrala.

4127. $y=Cx-e^C$; singularno rešenje je $y=x(\ln x-1)$.

4128. $y=Cx+C+C^2$; singularno rešenje je $y=-\frac{1}{4}(x+1)^2$.

4129. $y=Cx+a\sqrt[3]{1-C^3}$; singularni integral $\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}=\sqrt{a^3}$.

4130. $(C-x)y=C^2$; singularno rešenje je $y=4x$.

4131. $y^2-4e^x=0$. **4132.** $xy=1$. **4133.** $2y-x^2=0$.

4135. Ravnostrana hiperbola $2xy=\pm a^2$, pri čemu je a^2 površina trougla; trivijalno rešenje je — familija pravih $y=\pm\frac{C^2}{2}x+aC$.

4136. $(y-x-2a)^2=8ax$.

4137. Elipse i hiperbole.

4138. $x=\frac{Ce^{-\frac{2}{2p^2}}(1+p^2)}{p^2}$, $y=\frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}$, ili

$$x=\frac{(p^2+1)C}{\sqrt[4]{p}\,\sqrt[4]{(p^2+2)^3}},\quad y=\frac{-C\sqrt{p}}{\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}.$$

4139. $y^2=Cx^{-\frac{1}{k}}+\frac{k^2x^2}{2k+1}$. **4140*.** $\begin{cases} y=\cos\alpha\left(C+\frac{a}{2}\sin^2\alpha\right),\\ x=\sin\alpha\left(a-C-\frac{a}{2}\sin^2\alpha\right).\end{cases}$

* U dobijenoj diferencijalnoj jednačini zameniti $\frac{dy}{dx}$ sa $\operatorname{tg}\alpha$, zatim izraziti x pomoću y i parametra α, naći dx, zameniti dx sa $\frac{dy}{\operatorname{tg}\alpha}$ i rešiti dobijenu diferencijalnu jednačinu smatrajući y funkcijom parametra α.

4141. $S=at^2$. pri čemu je a neka određena konstanta.

4142. $x^2+y^2=2a^2\ln|Cx|$. **4143.** $x=Ce^{-x/2}$.

4144. $y=C(x^2+y^2)$. **4145.** $(x^2+y^2)^2=C(y^2+2x^2)$.

4146. Ako je parametar parabola $2p$ i ako se data prava uzme za ordinatnu osu, onda će jednačina trajektorije biti:

$$y=C+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}.$$

4147. Traktrisa.

4148. Mereći ugao α u jednom od dva moguća smera dobićemo jednačinu traženih izogonalnih trajektorija: $xy - \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2) = C$.

4149. Mereći ugao α u jednom od dva moguća smera dobijamo jednačinu familije traženih izogonalnih trajektorija

$$\ln(2x^2+xy+y^2) + \frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+2y}{x\sqrt{7}} = C.$$

4150*. Može se uzeti, recimo, da vetar duva duž ose Ox; tada će kriva rasprostiranja zvuka u ravni Oxy biti ortogonalna trajektorija familije krugova $(x-at)^2+y^2=(v_0 t)^2$ pri čemu je t — vreme računato od izlaska zvučnog talasa iz zvučnog izvora, a v_0 — brzina prostiranja zvuka u mirnom vazduhu.

Za svaku određenu vrednost t diferencijalna jednačina traženih ortogonalnih trajektorija je $y' = \frac{y}{x-at}$, uzeta zajedno sa jednačinom familije krugova. Eliminacijom parametra t iz ovih jednačina dobiće se neka Lagranževa jednačina, čije opšte rešenje je:

$$x = C(\cos\varphi + b)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}}, \quad y = C\sin\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}}$$

u kome je φ — parametar, a $b = \pm\frac{a}{v_0}$.

4151. $x = C\sin t + R(\cos t + t\sin t)$,
$y = -\cos t + R(\sin t - t\cos t)$.

4152. $x = \frac{C}{\operatorname{ch} t} + a(t - \operatorname{th} t)$, $y = C\operatorname{th} t + \frac{a}{\operatorname{ch} t}$.

4153. $x = a(\cos t + t\sin t) - \cos t\left(\frac{at^2}{2} + C\right)$,

$y = a(\sin t + t\cos t) - \sin t\left(\frac{at^2}{2} + C\right)$.

4154. $x = C\sin t + 2\operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{tg}^2 t - C\cos t - 2$.

4155. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$.

4156. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2-1) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + C_1 x + C_2$

4157. $y = \frac{x^2}{2}\left[\ln x - \frac{2}{3}\right] + C_1 x + C_2$. **4158.** $y = C_1 x^2 + C_2$.

4159. $y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$. **4160.** $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1 x^2 + C_2$.

4161. $y = \left(1 + C_1^2\right)\ln|x + C_1| - C_1 x + C_2$.

4162. $y = \left(C_1 x - C_1^2\right) e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$. **4163.** $y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$.

4164. $y = \frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1 x - 1)^3} + C_2$.

4165. $y = -\frac{1}{3}\sin^3 x + C_1\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) + C_2.$

4166. $(x+C_2)^2 = 4C_1(y-C_1).$ **4167.** $y = C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}.$

4168. $y = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}}.$

4169. $x = \frac{4}{3}\left(y^{\frac{1}{2}} - 2C_1\right)\sqrt{y^{\frac{1}{2}} + C_1} + C_2.$ **4170.** $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}.$

4171. $(x+C_2)^2 - y^2 = C_1.$ **4172.** $y = C_1 e^{C_2 x}.$

4173. $y\cos^2(x+C_1) = C_2.$ **4174.** $(x+C_2)\ln y = x + C_1.$

4175. Ako je proizvoljna konstanta, uvedena prvom integracijom, pozitivna (C_1^2), onda je $y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 x + C_2)$; ako je, pak, ona negativna ($-C_1^2$) onda je $y = C_1 \frac{1+e^{2(C_1 x + C_2)}}{1-e^{2(C_1 x + C_2)}} = -C_1 \operatorname{cth}(C_1 x + C_2)$; najzad, ako je $C_1 = 0$. onda je $y = -\frac{1}{x+C_2}.$

4176. $x = C_1 + \cos C_2 \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y+C_2}{2}\right|.$ **4177.** $C_1 x + C_2 = \ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$

4178. $\frac{x+C_2}{2} = C_1 \cdot \operatorname{arctg}(C_1 \ln y).$ **4179.** $\ln|C_1 y| = 2\operatorname{tg}(2x + C_2).$

4180. $y = \ln|x^2 + C_1| + \frac{a}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right| + C_2$, ako je $C_1 < 0$, i $y = \ln|x^2 + C_1| + \frac{2a}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$, ako je $C_1 > 0$.

4181*. Izvršimo li smenu $y' = p$ jednačina se raspada na dve, od kojih je jedna Klero-ova; njeno opšte rešenje je $y = C_1 + C_2 e^{C_1 x}$, a singularno $y = \frac{4}{C-x}$. Druga jednačina je $y' = 0$.

4182. $y = C_1 x(x - C_1) + C_2$ i singularno rešenje $y = \frac{x^3}{3} + C.$

4183. $y^2 = C_1 x + C_2.$ **4184.** $y = \ln\left|\frac{C_1 x^{C_1}}{C_2 x^{C_2}}\right|.$

4185. $y = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C_1 x + C_2}.$ **4186.** $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$

4187. $y = C_1 x e^{\frac{C_2}{x}}.$ **4188.** $\ln|y + C_1| + \frac{C_1}{y+C_1} = x + C_2.$

4189. $y = x^3 + 3x + 1.$

4190. $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}.$ **4191.** $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}.$ **4192.** $y = \frac{4}{(x+4)^2}.$

4193. $y - x = 2\ln|y|.$ **4194.** $y = \sqrt{2x - x^2}.$

4195. $y=\sqrt{1+e^{2x}}$. **4196.** $y=-\ln|1-x|$. **4197.** $y=\frac{x+1}{x}$.

4198*. $y=x$. Izvršiti smenu $y=ux$. **4199.** $y=2e^{\frac{1}{2}x^2}-1$.

4200*. Diferencijalna jednačina krive je $dx=\frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^{\frac{2}{k}}-1}}$.

Pri čemu je k koeficijent proporcionalnosti. Ako je $k=1$ rešenje je $y=\frac{1}{2C_1}[e^{C_1x+C_2}+e^{-(C_1x+C_2)}]=$ $=\frac{\operatorname{ch}(C_1x+C_2)}{C_1}$; tj. lančanica; ako je $k=-1$ dobija se $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$, —krug; za $k=-2$ dobijena diferencijalna jednačina postaje: $dx=\sqrt{\frac{C_1 y}{1-C_1 y}}$, a ovo je diferencijalna jednačina cikloide, a za $k=2$ dobiće se $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$, — parabola.

4201. $e^{\frac{y}{a}}=C_2\sec\left(\frac{x}{a}+C_1\right)$. **4202.** $Cx=y^{2k-1}$.

4203. Lančanica. **4204.** $v=\sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg+kv_0^2}}$. **4205.** Parabola.

4206. $S=\frac{m}{3k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t+C\right)^3}-\sqrt{C^3}\right]$.

4207*. Postavimo koordinatni sistem tako da koordinatni početak leži na površini tečnosti a x-osa neka bude vertikalna i usmerena na dole, i neka jednačina zraka ima oblik $y=f(x)$. Na dubini x imaćemo $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+d\alpha)}=\frac{m+dm}{m}$, pri čemu je m—indeks prelamanja svetlosti na dubini x, a α—ugao između vertikale i tangente svetlosnog zraka. Očevidno je $\operatorname{tg}\alpha=y'$. Iz jednačine

$$m\sin\alpha=(m+dm)(\sin\alpha\cos d\alpha+\cos\alpha\sin d\alpha),$$

kad otvorimo zagrade i odbacimo sabirke koji predstavljaju beskonačno male veličine višeg reda, dobijamo: $m d\alpha=-dm\cdot\operatorname{tg}\alpha$, a odavde: $\frac{dm}{m}=-\frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$. Integracijom ove jednačine dobijamo y' u funkciji od m. Kad u tom rezultatu zamenimo m (shodno uslovima zadatka) izrazom linearnim po x, i integralimo još jednom, dobijamo definitivno

$$y=\frac{m_0 h\sin\alpha_0}{m_2-m_1}\ln\left|m+\sqrt{m^2-m_0^2\sin^2\alpha_0}\right|+C.$$

gde je $m=\frac{(m_2-m_1)x+m_1 h}{h}$.

4208. $y=x^2\ln\sqrt{x}+C_1x^2+C_2x+C_3$.

4209. $y=-\frac{1}{8}\sin 2x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

4210. $y=\frac{e^{ax}}{a^{10}}+P_9$ (P_9 je polinom 9-tog stepena po x sa proizvoljnim koeficijentima).

4211. $y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3-C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|$.

4212. $y=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$.

4213. $y=\frac{1}{3}(C_1-2x)^{\frac{3}{2}}+C_2x+C_3$. **4214.** $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

4215. Rešenja se mogu napisati u tri vida:

$$y=C_1\sin(C_2x+C_3),\text{ ili } y=C_1\,\mathrm{sh}(C_2x+C_3),\text{ ili } y=C_1\,\mathrm{ch}(C_2x+C_3).$$

4216. $(x+C_2)^2+(y+C_3)^2=C_1^2$.

4217. $y=C_2\left(xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$.

4219. 2) $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{3x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\cdots$

4220. $y=1-\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{2(x-1)^4}{4!}+\frac{3(x-1)^5}{5!}+\cdots$

4221. $y=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}-\frac{4(x-1)^5}{5!}+\cdots$

4222. $y=1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\cdots$ Ako je $f(x)\approx 1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}$, onda se za $x=-0{,}5$ dobija naizmeničan numerički red i vrednost prvog odbačenog člana je manja od 0,001.

4223. $y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{14x^6}{6!}+\cdots$; petog.

4224. $y=x^2-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{80}x^8-\frac{7}{4400}x^{11}+\cdots$; 0,318; 0,96951.

4225*. Diferencijalna jednačina zadatka je $E=L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}\cdot\frac{V_0-kQ}{k_1}$, pri čemu je Q količina elektriciteta koja protekne kroz kolo od početka opita do momenta t. Izrazimo li Q pomoću V (V je prisutna količina vode u sudu u momentu t) i odredimo li koeficijente iz uslova zadatka, dobijamo jednačinu $V''+aVV'+b=0$, u kojoj je $a=\frac{1}{k_1L}=0{,}005$, $b=\frac{kE}{L}=0{,}00935$. Integracijom ove jednačine pri početnim uslovima: $V_0=1000\,cm^3$, $V_0'=-kI_0=-0{,}00187\,cm^3/sec$, dobijamo red

$$V=1000-0{,}00187\,t-10^{-9}\cdot[2{,}91\,t^3-3{,}64\,t^4+3{,}64\,t^5-3{,}04\,t^6+2{,}17\,t^7-\cdots].$$

Ovaj je red naizmenični, sa koeficijentima koji, počev od šestog člana, brzo teže nuli, pa je zato pogodan za izračunavanje.

4226. Diferencijalna jednačina zadatka ima oblik

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}\cdot\frac{k_1}{M_0-kQ}=E.$$

Uzmemo li za traženu funkciju količinu sone kiseline još nerazložene do trenutka t, jednačina se svodi na $yy''+ay'+by=0$, pri čemu je $a=\frac{k_1}{L}=50$, $b=\frac{kE}{L}=0{,}0191$. Integracijom ove jednačine pri početnim uslovima $y_0=M_0=10$; $y_0'=-kI_0=-0{,}00381$, dobijamo red

$$y=10-0{,}00381\,t+10^{-10}\,t^3\cdot(1{,}21-1{,}52\,t+\cdots).$$

4227. $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$. **4228.** $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

4229. $(x^3 - 3x^2 + 3x)y''' - (x^3 - 3x + 3)y'' - 3x(1-x)y' + 3(1-x)y = 0$.

4230. $y = 3x^2 - 2x^3$. **4231.** a) $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \neq \text{const}$; b) $y'' \sin 2x - 2y' \cos 2x = 0$.

4232*. 3) Po formuli Liuvil-Ostrogradskog je

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C \cdot e^{-\int P(x)\,dx}.$$

ili posle razvijanja determinante (vronskijana); $y_1 y_2' - y_1' y^2 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$. Podelimo li obe strane ove jednačine sa y_1^2 možemo je napisati u obliku $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx}$, a odavde odmah sledi tražena relacija.

4233. $y = C_1 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2 x$.

4234. $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$. **4235.** $y = x^2 - e^{x-1}$.

4236*. Funkcije P i Q moraju biti vezane relacijom $Q' + 2P \cdot Q = 0$. Zameniti y_1 sa $\frac{1}{y_2}$ u formuli (koja proizilazi iz formule Liuvil-Ostrogradskog) iz zadatka 4232, dobijenu relaciju diferencirati dva puta pa zameniti y_2' i y_2'' u datu diferencijalnu jednačinu.

4237*. $y = C_1(4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1-x^2}(4x^2 - 1)$. Shodno uslovu stavimo $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Kad y_1 uvrstimo u datu jednačinu dobijamo $B = 0$, $D = 0$, $A : C = \frac{4}{-3}$, ili $A = 4k$, $C = -3k$. S obzirom na osobine linearnih članova može se uzeti $k = 1$, pa je $y_1 = 4x^3 - 3x$. Znajući jedno partikularno rešenje, na poznat način nalazimo drugo i sastavljamo opšte rešenje.

4238. $y = C_1 \sin x + C_2\left[1 - \sin x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\right]$.

4239. $y = C_1 x + C_2 x \int \frac{e^x\,dx}{x^2}$. **4240.** $y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$.

4241. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$. **4242.** $y = x^3 + x(C_1 + C_2 \ln|x|)$.

4243. $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$. **4244.** $y = C_1 x^3 + C_2(x+1) - x$.

4245. $y = 2 + 3x + x\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} x\right) + x^2$.

4246. $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \cdots$

4247. $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2x^7}{7!} + \frac{62x^8}{8!} - \cdots$

4248. $y = \frac{x^2}{2} + \left[\frac{x^4}{4!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{5x^8}{8!} + \cdots + \frac{(2n-1)x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \cdots\right]$.

4249. $y = C_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \cdots\right) + C_2\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \cdots\right)$.

4250. $y=C_1\left(1+\frac{x^4}{12}+\cdots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots\right)$.

4251. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. **4252.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

4253. $y=C_1e^{4x}+C_2$. **4254.** $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

4255. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. **4256.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

4257. $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

4258. $y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$. **4259.** $y=e^x(C_1+C_2x)$.

4260. $x=(C_1+C_2t)e^{2,5t}$. **4261.** $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{4}x}$

4262. $y=4e^x+2e^{3x}$. **4263.** $y=3e^{-2x}\sin 5x$. **4264.** $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.

4265. $y=[1+(1-m)x]e^{mx}$. **4266.** $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

4267. Ako je $k>0$, to je $y=\frac{a}{\sqrt{k}}\sin[\sqrt{k}(x-x_0)]+y_0\cos[\sqrt{k}(x-x_0)]$; ako je $k<0$, onda je $y=\frac{1}{2\sqrt{k_1}}\left[(y_0\sqrt{k_1}+a)e^{\sqrt{k_1}(x-x_0)}+(y_0\sqrt{k_1}-a)e^{-\sqrt{k_1}(x-x_0)}\right]$, gde je $k_1=-k$.

4268. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$. **4269.** $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{a^2+1}$.

4270. $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

4271. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{2}\cos 2x-2\sin 2x$.

4272. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

4273. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x+1$. **4274.** $y=C_1e^x+C_2e^{-5x}-0{,}2$.

4275. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\overline{y}$, gde je $\overline{y}$ sledeća funkcija: 1) $\frac{5}{3}e^{-x}$; 2) $3xe^{2x}$;

3) $\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$; 4) $x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$;

5) $-\frac{8}{5}e^x\left[\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right]$; 6) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^x(2x^2+x)$;

8) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\sin 2x)$; 9) $-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$;

10) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\sin x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\sin 3x$; 11($-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^x$.

4276. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\overline{y}$, gde je $\overline{y}$ jeda od funkcija:

1) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$; 2) $\frac{1}{7}e^x$; 3) $5\sin x-2\cos x$;

4) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\sin 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$; 5) $\cos 2{,}5x+\cos 2{,}5x-0{,}02xe^{-2{,}5x}$;

6) $\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x$;

7) $e^{-x}[(10x+18)\sin x-(20x+1)\cos x]$; 8) $\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x}-xe^{-\frac{5}{2}x}\right)$.

4277. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\overline{y}$, gde je $\overline{y}$ jedna od funkcija: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{-x}$;

3) $\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

5) $\frac{1}{169}\left(\frac{-5}{2}\sin 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$;

6) $\frac{3}{100}(3\sin x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\sin 3x-12\cos 3x)$;

7) $2x^2+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$; 8) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$;

9) $\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(3\sin x+4\cos x)$; 10) $e^x-\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{18}e^{1-x}$.

4278. $y=C_1\cos x+C_3\sin x+\overline{y}$, gde je $\overline{y}$ jedna od funkcija: 1) $2x^3-13x+2$;

2) $\cos 3x$; 3) $\frac{1}{2}x\sin x$; 4) $-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$; 5) $\frac{1}{4}\left(x\sin x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$;

6) $9+4\cos 2x-0{,}2\cos 4x$; 7) $0{,}5\operatorname{ch}x$; 8) $0{,}5+0{,}1\operatorname{ch}2x$.

4279. $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)+\overline{y}$, gde je $\overline{y}$ jedna od funkcija:

1) $\frac{25}{16}e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\frac{15}{219}\sin\frac{4}{5}x+\frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$;

3) $\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{908}{125}\right)$; 4) $-\frac{5}{9}\cos x\cdot e^{\frac{3}{5}x}$;

5) $-\frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$; 6) $0{,}5e^{2x}+1{,}3$.

4280. $y=2+C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

4281. $y=e^x(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x^2+1}+x\operatorname{arctg}x)$.

4282. 1) $y=e^x(x+C_1)-(e^x+1)\ln(e^x+1)+C_2$;

2) $y=\frac{1}{2}e^x[\arcsin e^x+e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C_1]+\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+C_2$;

3) $y=C_1e^x-\cos e^x+C_2$.

4283. $y=(1+x)e^{-\frac{3}{2}x}+2e^{-\frac{5}{2}x}$

4284. $y=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$.

4285. $y=e^x+x^2$. 4286. $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$.

4287. $y=\frac{1}{3}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin x-\cos x$.

4288*. Navedeni izraz za y diferencirati dva puta i uvrstiti y, y' i y'' u datu jednačinu; u dva tri slučaja dobija se identitet.

4289. $y=x^3(C_1+C_2x^4)$. 4290. $y=\frac{x}{2}+C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|$.

4291. $y=x[C_1+C_2\ln|x|+\ln^2|x|]$.

4292. $y=x\ln|x|+C_1x+C_2x^2+x^3$.

4293. Ako je $\frac{1}{m\alpha}>\omega^2$, to je $y=C_1\cos kt+C_2\sin kt+$

$$+\frac{g}{k^2-\omega^2}\cos\omega t+\frac{e\omega^2}{k^2},\text{ gde je } k^2=\frac{1}{m\alpha}-\omega^2.$$

Ako je $\frac{1}{m\alpha}<\omega^2$, to je $y=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}-\frac{g}{k^2+\omega_2}\cos\omega t-\frac{e\omega^2}{k^2}$, gde je $k^2=\omega^2-\frac{1}{m\alpha}$.

4294. $s=\frac{1}{5}(4e^t+e^{-4t})$.

4295. $s=e^{-0{,}2t}[10\cos(0{,}245t)+8{,}16\sin(0{,}245t)]$; $s|_{t=3}\approx 7{,}07$ *cm*.

4296. $t=\sqrt{\frac{am}{f}}\ln\frac{F+\sqrt{f(2F-f)}}{F-f}$.

4297. $s=e^{-0{,}245t}[2\cos(156{,}6t)+0{,}00313\sin(156{,}6t)]$.

4298*. $k=33\frac{1}{3}\frac{g}{cm}=33\frac{1}{3}\cdot g\frac{din}{cm}$; $t=0{,}38$ *sek.*; visina potopljenog dela oblice je $x=5[3+\cos(8{,}16t)]$. Pri izvođenju jednačine uzeti da je $g=1000\ cm/sec^2$.

4299*. $r=\frac{a_0}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$. Sve se odigrava tako kao kad bi cev bila nepomična a na kuglicu bi dejstvovala sila jačine $m\omega^2r$ (r je odstojanje kuglice od ose obrtanja).

4300. Ako je $k>m\omega^2$, to je $r=\frac{a_0}{k-m\omega^2}\left[k-m\omega^2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\omega^2}\right)\right]$;

ako je $k=m\omega^2$, to je $r=a_0\left(1+\frac{k}{2m}t^2\right)$;

ako je $k<m\omega^2$, to je $r=\frac{a_0}{m\omega^2-k}\left[m\omega^2\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\omega^2-\frac{k}{m}}\right)-k\right]$.

4301. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3$.

4302. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$.

4303. $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + (C_3 + C_4 x) e^{-2x}$.

4304. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

4305. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}$. **4306.** $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$.

4307. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$.

4308. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x^{n-3} + C_4 x^{n-4} + \dots + C_{n-1} x + C_n$.

3409. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$.

4310. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cos \frac{x}{2} + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) \sin \frac{x}{2} + C_7 x + C_8$.

4311. $y = e^{-x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1})$. **4312.** $y = 1 + \cos x$.

4313. $y = e^x + \cos x - 2$. **4314.** $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$.

4315. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-2x} + (x^2 + x - 1) e^{-x}$.

4316. $y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x + \frac{1}{9} \cos x$.

4317. $y = (C_1 + C_2 x) \cos ax + (C_3 + C_4 x) \sin ax - \frac{x^2 \cos ax}{8a^2}$.

4318. $y = \frac{1}{60} x^5 - \frac{1}{2} x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.

4319. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \frac{x^2 - 3x}{8} e^x - \frac{1}{4} x \sin x$.

4320. $y = (C_1 + C_2 x + x^2) e^x + (C_3 + C_4 x + x^2) e^{-x} + \sin x + \cos x$.

4321. $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$. **4322.** $y = e^x + x^3$.

4323. $y = x (C_1 + C_2 \ln |x| + C_3 \ln^2 |x|)$.

4324.1. $\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t} [(C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t]. \end{cases}$

4324.2. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^t + 3 C_2 e^{5t}. \end{cases}$ **4324.3.** $\begin{cases} x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$

4324.4. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - 3 C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5 C_3 e^{-t}, \end{cases}$ **4324.5.** $\begin{cases} x = C_1 + 3 C_2 e^{2t} \\ y = -2 C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 + C_2 e^{2t} - 2 C_3 e^{-t}. \end{cases}$

4324.6. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^t - 2 C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ z = -C_1 e^t - 3 C_2 e^{2t} + 3 C_3 e^{3t}. \end{cases}$

4324.7. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + e^{3t} (C_2 \cos t + C_3 \sin t), \\ y = e^{3t} [(C_2 + C_3) \cos t + (C_3 - C_2) \sin t], \\ z = C_1 e^{2t} + e^{3t} [(2 C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + 2 C_3) \sin t]. \end{cases}$

4325. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t \operatorname{sh} t, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \dfrac{7}{40} e^t + \dfrac{1}{5} e^{-2t}, \\ y = \dfrac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \dfrac{1}{40} e^t + \dfrac{3}{10} e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} z = C_1 y; \\ zy^2 - \dfrac{3}{2} x^2 = C_2. \end{cases}$ 4328. $\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{C_1 + x^2}}{\ln\left|\dfrac{C_2}{x + \sqrt{x^2 + C_1}}\right|}. \\ z = \sqrt{C_1 + x^2} \ln\left|\dfrac{C_2}{x + \sqrt{x^2 + C_1}}\right|. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} \dfrac{y}{x} = C_1; \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \end{cases}$ 4330. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1 y; \\ z = C_2 y. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} y^2 - z^2 = C_1; \\ yz - y^2 - x = C_2. \end{cases}$ 4332. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}. \\ y = C_1 e^{-t} + 3 C_2 e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} x = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 - \dfrac{1}{6} t^3 + e^t, \\ y = C_4 - (C_1 + 2 C_3) t - \dfrac{1}{2} (C_2 - 1) t^2 - \dfrac{1}{3} C_3 t^3 + \dfrac{t^4}{24} - e^t. \end{cases}$

4335. $\begin{cases} x + y + z = C_1; \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \end{cases}$ 4336. $\begin{cases} z = x - y; \\ y(y - 2x)^3 = (x - y)^2. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{3}. \\ y = -\dfrac{t}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} e^{-t} + \dfrac{1}{6} e^{2t} + \dfrac{1}{2} e^{-2t}, \\ y = \dfrac{1}{3} e^{-t} + \dfrac{1}{6} e^{2t} - \dfrac{1}{2} e^{-2t}, \\ z = -\dfrac{1}{3} e^{-t} + \dfrac{1}{3} e^{3t}. \end{cases}$ 4339. $\begin{cases} x = -e^{-t}, \\ y = e^{-t}, \\ z = 0. \end{cases}$

4340. Tražene krive su $y_1 = \dfrac{C_1 x^2 - C_2}{2x}$ i $y_2 = \dfrac{C_1 x^2 + C_2}{2x}$. Za date početne uslove dobijaju se hiperbole

$$y_1 = \frac{3 - x^2}{2x}, \quad y_2 = \frac{3 + x^2}{2x}.$$

4341. $y=e^{2x}$. **4342.** Ravne krive $\begin{cases} x-y+z=0; \\ x=\pm\dfrac{z\ln|z|}{2} \end{cases}$

4343. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+(l_1-l_0)\left(1-\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right)\right], \\ y=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+l_0+l_1+(l_1-l_0\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right]. \end{cases}$

4344. $\begin{cases} x=10\operatorname{ch}2t-\dfrac{4}{49}\cos 14t+\dfrac{200}{49}, \\ y=10\operatorname{ch}2t+\dfrac{6}{49}\cos 14t-\dfrac{300}{49}. \end{cases}$

U ovim rezultatima je x — put teže, a y — put lakše kuglice.

4345. $A=\dfrac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1-\left(\dfrac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right]$, $B=\alpha\dfrac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$, pri čemu je

$$\alpha=\sqrt{B_0^2+\frac{2k_1}{k}A_0}, \quad \beta=\frac{\alpha-B_0}{\alpha+B_0}.$$

4346*. Ako je T — količina otrova onda je $\dfrac{dN}{dt}=aN-bNT$, $\dfrac{dT}{dt}=cN$ i $\dfrac{dN}{dt}=0$ u momentu u kojem je $N=M$.

4347. $h_1=\dfrac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}+\dfrac{S_2}{S_1+S_2}(H_1-H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$,

$$h_2=\frac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}-\frac{S_1}{S_1+S_2}(H_1-H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}.$$

4348. 1) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2)=0{,}00008\dfrac{E_1^2t^3}{R_0T^2}$; na 53°;

2) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2)=\dfrac{6E_0^2}{\pi R_0\cdot 10^7}\cdot(200\pi t-\sin 200\pi t)$; na 76°.

4349. 1) 44,5°; 2) 46,2°.

4350.

x	1,00	1,05	1,10	1.15	1,20	1,25
y	1,000	1,000	0,997	0,992	0,984	0,973

x	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
y	0,959	0,942	0,923	0,901	0,876

4351. $y|_{x=1}=3{,}43656\ldots$

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2,5	3,1667	3,37500	3,42500	3,43472

granica relativne greške aproksimacije y_5 je oko 0,1 %.

4352. 0,46128; ista se vrednost dobija i po Simpsonovoj formuli za $2n=10$. Sve su cifre pouzdane.

4353. $y_4=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+\frac{5x^5}{12}+\frac{16x^6}{75}+$ itd.; $y_4(0{,}3)\sim 1{,}543$;

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+\frac{11x^5}{20}+\frac{22x^6}{45}+\text{ i t. d.};$$

$$f(0{,}3)\approx 1{,}545.$$

Greška je manja od 0,2 %.

4354. 0,808.

4355 . 1,001624. Rezultat se najbrže dobija ako traženu funkciju tražimo odmah u obliku stepenog reda.

4356 . 1,0244. Vidi uputstvo u prethodnom zadatku.

4357. $y=x+\frac{2}{4!}x^4+\frac{2\cdot 5}{7!}x^7+\cdots+\frac{2\cdot 5\ldots(3t-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}+\cdots$; $k=0{,}2297$.